OBJEM JEHLANU

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

6. prosince 2018

Teorie obsahu

Moderní pojetí

$\forall\, A, B \in U: \ A \cap B \in U, \ A \cup B \in U$

1. $S(A) \geq 0, \quad S(\emptyset) = 0$
2. $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow \quad S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. $A \cong B \quad \Rightarrow \quad S(A) = S(B)$
4. $\exists\, E; \quad S(E) = 1$

odtud plyne:
$A \subset B \quad \Rightarrow \quad S(A) \leq S(B)$

obdélník $\rightarrow$ rovnoběžník $\rightarrow$ trojúhelník
obdélník $\rightarrow$ lichoběžník

Teorie obsahu – postup ve škole

Základ

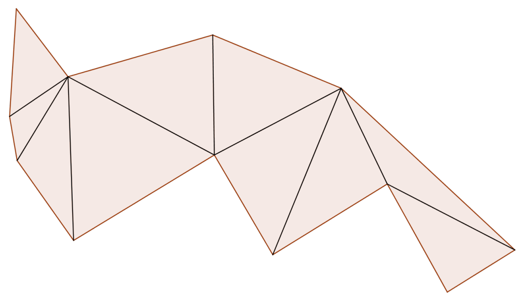
obdélník $\rightarrow$ rovnoběžník $\rightarrow$ trojúhelník
obdélník $\rightarrow$ lichoběžník

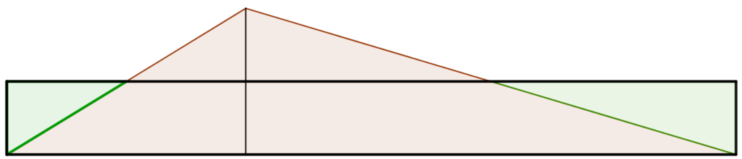
Obsah obdélníka

$S = a \cdot b, \quad$ kde $a, b \in \mathbb{N}$
$S = a \cdot b, \quad$ kde $a, b \in \mathbb{Q}^+$
$S = a \cdot b, \quad$ kde $a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad$ tj. $S = \lim a_n \cdot b_n$

Teorie obsahu – ekvidekomposabilita

každý mnohoúhelník lze rozložit na trojúhelníky





Ekvidekomposabilita ve 2D

Def. Dva mnohoúhelníky jsou *ekvidekomposabilní*:
lze je napsat jako sjednocení týchž nepřekrývajících se trojúhelníků

Bolyai–Gerweinova věta (1832, 1833)
Každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní.

Tj. definici obsahu mnohoúhelníků lze založit na rozkladech na trojúhelníky.

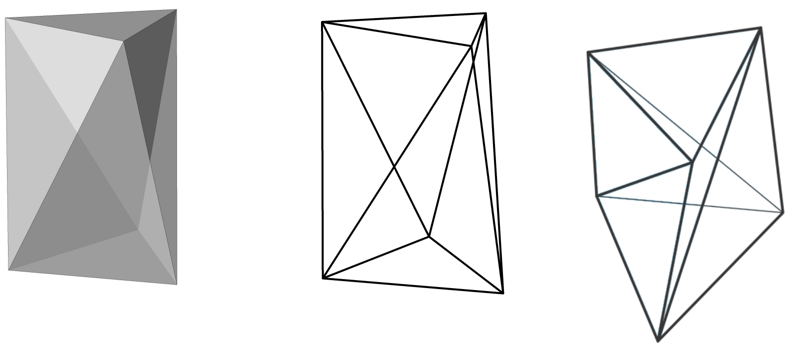
Ekvidekomposabilita ve 3D

Existuje rozklad libovolného mnohostěnu na čtyřstěny?

1911 Nels Johann Lennes:
ne

1928 Erich Schönhardt
příklad – Schönhardtovo těleso

1928 Erich Schönhardt

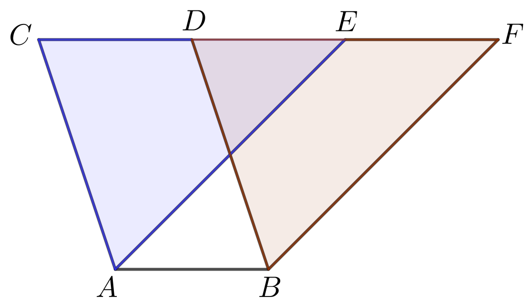


Hilbert: obsah rovnoběžníku

Hilbert odkazuje na Eukleida (I, 35)

$$CD = EF \quad \Longrightarrow \quad CE = DF$$

$$\triangle ACE \cong \triangle BDF \qquad (sss)$$



odeberme společný ∇, vzniknou lichoběžníky stejného obsahu
ke každému z nich přidejme bílý $\triangle$, vzniknou rovnoběžníky stejného obsahu

Hilbert: obsah trojúhelníku

Hilbert odkazuje na Eukleida (I, 37)

předchozí věta platí pro rovnoběžníky, tj. platí i pro jejich poloviny,

což jsou trojúhelníky

Tato úvaha je v pořádku, máme-li k dispozici Archimédův axiom.
Nebo reálná čísla.
Nebo aspoň tvrzení, že celek je větší než část (tak u Eukleida).

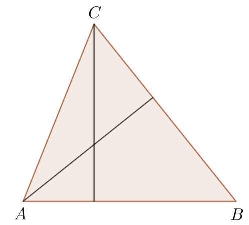
V nearchimédovských geometriích může být obsah všech mnohoúhelníků stejný. Celá teorie obsahu je pak triviální.

Hilbert: obsah trojúhelníku

Hilbert řeší obsah trojúhelníku matematicky čistě, ale ...

zkrátka definuje

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\, z \cdot v$$



korektnost: dle věty uu jsou podobné pravoúhlé trojúhelníky

$$\frac{c}{v_a} = \frac{a}{v_c} \qquad \Longrightarrow \qquad c \cdot v_c = a \cdot v_a$$

Objem jehlanu

Objem jehlanu:

$$V = \frac{1}{3} S_\triangle \cdot v$$

tj. třetina objemu hranolu

poprvé uvedl Démokritos dokázal Eudoxos

důkaz založen na exhaustivní metodě:

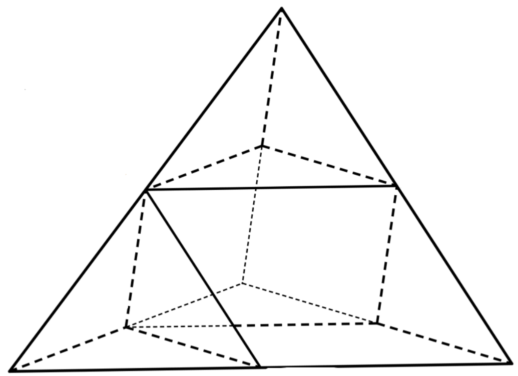
X, 1 dány dvě veličiny různé velikosti: větší (V) a menší (ε):
- od větší odečteme část větší než její polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina

a tak dále ⟹ v některém kroku už zbude veličina menší než ε
(viz též Archimédův axiom)

Objem jehlanu — XII, 3–7

XII, 3

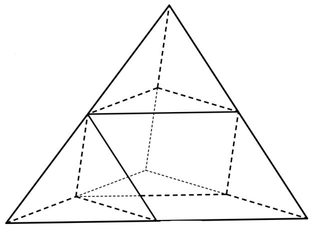
Jehlan s trojúhelníkovou podstavou lze rozložit na:
- dva shodné jehlany (a podobné celému jehlanu)
- dva hranoly stejného objemu (větší než polovina celého jehlanu)



Objem jehlanu — XII, 3–7

XII, 5 Poměr objemů trojbokých jehlanů, které mají stejnou výšku, je roven poměru obsahů jejich podstav.

důkaz založen na exhaustivní metodě

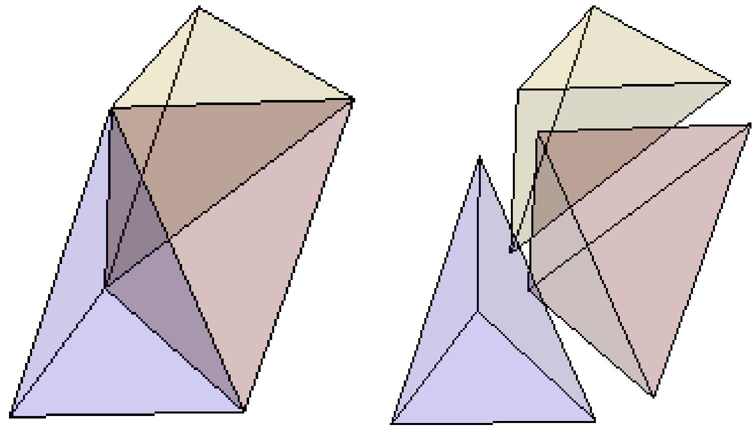


XII, 6 podstavou mnohoúhelník

XII, 7 hranol lze rozložit na 3 jehlany stejného objemu

Objem jehlanu — XII, 3–7

XII, 7 hranol lze rozložit na 3 jehlany stejného objemu



XII. kniha – další výsledky

XII, 2 poměr obsahů dvou **kruhů** = poměr čtverců jejich průměrů

XII, 10 kužel je třetinou **válce** s touž podstavou a výškou

XII, 17 dvě soustředné **koule**; do větší vepsat pravidelný mnohostěn, který nemá s menší koulí žádný společný bod

XII, 18 poměr obsahů dvou **koulí** = poměr krychlí jejich průměrů

Objem koule u Archiméda

povrch koule:

$$S = 4\pi r^2$$

objem koule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r$$

vlastně objem jehlanu s podstavou rovnou povrchu koule a výškou r

lze brát i součet jehlánků s výškou r a podstavami pokrývající povrch koule

Objem koule dnes

objem je integrálem obsahu:

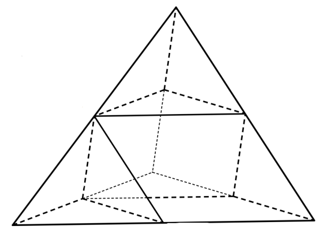
$$\int_0^r 4\pi R^2 \,\mathrm{d}R = \frac{4}{3}\pi r^3$$

podobně obsah a obvod kruhu:

$$\int_0^r 2\pi R \,\mathrm{d}R = \pi r^2$$

Objem jehlanu dnes

$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$



$$V_1 = \frac{1}{8}Sv + \frac{1}{8}Sv = \frac{1}{4}Sv$$

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}Sv = \frac{1}{4^2}Sv$$

$$V_3 = 2^2 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{8}Sv = \frac{1}{4^3}Sv$$

$$V = \frac{1}{4}Sv + \frac{1}{4^2}Sv + \frac{1}{4^3}Sv + \dots = \frac{1}{4}Sv \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}Sv \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}Sv$$

23 Hilbertových problémů

Druhý mezinárodní kongres matematiků, Paříž
8. srpen 1900
Sekce Historie a bibliografie M

Publikace 23 HP

[1900a] *Problèmes mathématiques.* l'Ens. Math. (1) 2, 349–355.
[1900b] *Mathematische Probleme.* Nachrichten Königlichen Gesellschaft Wissenschaften Göttingen, math.-physik. Klasse, 253–297.

[1901a] Mathematische Probleme. Arch. Math. Physik (3) 1, 44–63, 213–237.

[1901b] *Problèmes mathématiques.* Revue Gén. Sci. Pures Appl. 12, 168–174.

[1901a] vyšlo ještě 1902 francouzsky
[1902a] *Sur les problèmes futurs des mathématiques.* 58–114;
1902b. *Mathematical problems.* Bull. Amer. Math. Soc. 8, 437–479.

Gaussův dopis Gerlingovi

Gauss an Gerling. Göttingen, 8. April 1844.

.... Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, **warum** es so ist (was bei Ihnen nur als eine wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höhern Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben.

Gaussův dopis Gerlingovi

Gauss an Gerling. Göttingen, 17. April 1844.

Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloss symmetrischer, nicht zugleich congruenter, Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, dass man sagt,

1) dass man auf diejenigen Pyramiden aufmerksam macht, deren symmetrische Gegenstücke mit ihnen zugleich congruent sind, welches nemlich diejenigen sind, an denen zwei Seitenflächen zu einer dritten normal sind und in ihren Durchschnitten mit dieser gleiche Kanten geben, und
2) dass man nachweist, wie jede Pyramide in 12 Pyramiden von der eben bezeichneten Art zerlegt werden kann.

Třetí Hilbertův problém

Předložit dva čtyřstěny se shodnými podstavami a s rovnajícími se výškami, které nelze rozložit na shodné čtyřstěny, a které nelze složit se shodnými čtyřstěny tak, aby tvořily dva mnohostěny, které by bylo možno rozložit na shodné čtyřstěny.

Max Dehn (1878 – 1952)

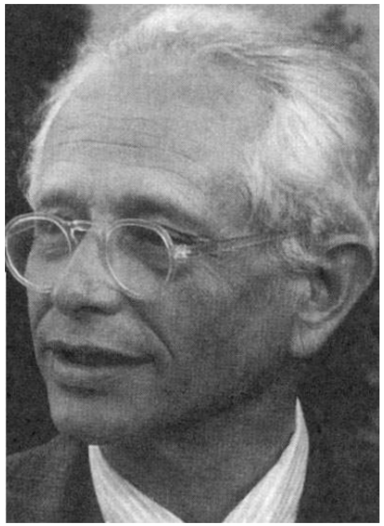
Žák Hilbertův

Doktorát 1900

1922 Frankfurt:
Seminář historie M

1940/41 USA

1945 Black Mountain



Řešení

Dehn M.: *Über raumgleiche Polyeder.* Nachrichten Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900, 345–354.

Zde předložil dva čtyřstěny řešící třetí Hilbertův problém.

Dehn M.: *Über den Rauminhalt.* Math. Ann. 55(1902), 465–478.

Kagan, V. F.: *Über die Transformation der Polyeder.* Math. Ann. 57(1903), 421–424.

M. Dehn a D. Hilbert

Výroční zpráva královské vědecké společnosti v Göttingen (1900)

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1900. Heft 3.

Inhalt.

Göttingen,

Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung

Lüder Horstmann.

Dehnovy invarianty (H. Hadwiger)

Invariantní vzhledem k rozkladu (i shodnosti):

$$D_f(P) = D_f(P1) + D_f(P2)$$

Pak už snadno rozhodneme, zda dva čtyřstěny řeší 3HP:

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} f(\alpha_e) \cdot |e|$$

až na rac. násobek π – dihedrální fce

$f : R \to Q$; $\forall$ a, b $\in$ R, q $\in$ Q:

$f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$, $f(\pi) = 0$

Dehnovy invarianty – příklad

Jednotková krychle K

$\alpha_e = \pi/2$ $|e| = 1$

tudíž

$D_f(K) = 12 \cdot f(\alpha_e) \cdot |e| = 12 \cdot f(\pi/2) \cdot 1 = 6 \cdot f(\pi) = 0$

Zobecnění Dehnových výsledků

DI umožňují: dva mnohostěny **nemají** žádný společný rozklad

Sydler J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions.* Comment. Math. Helv. 40(1965), 43–80.

Mají $\Leftrightarrow$ jsou si Dehnovy invarianty rovny $\forall f$

n > 3 – Hugo Hadwiger, 1954

Zobecnění – objem jehlanu v n-rozměrném prostoru

simplex – konvexní obal $n+1$ lineárně nezávislých bodů v n-rozměrném prostoru

- 0-rozměrný simplex – bod
- 1-rozměrný simplex – úsečka $L = 1 \cdot L_h$
- 2-rozměrný simplex – trojúhelník $S = \frac{1}{2} \cdot S_h$
- 3-rozměrný simplex – čtyřstěn $V = \frac{1}{3} \cdot V_h$
- 4-rozměrný simplex – 4-simplex $V = \frac{1}{???} \cdot V_h$
- ...

(porovnání s objemem opsaného hranolu)

Zobecnění – objem jehlanu v n-rozměrném prostoru

obsah rovnoběžníku $ABCD$ a objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$:

$$S = \left|\det \begin{pmatrix} B-A \\ D-A \end{pmatrix}\right| \qquad V = \left|\det \begin{pmatrix} B-A \\ D-A \\ E-A \end{pmatrix}\right|$$

simplex je v n-rozměrném prostoru dán $n+1$ LNZ body
zvolíme-li jeden (např. A), můžeme zbylé vrcholy permutovat: $n!$

- úsečka $L = 1 \cdot L_r$
- trojúhelník $S = \frac{1}{2} \cdot S_r$
- čtyřstěn $V = \frac{1}{6} \cdot V_r$
- 4-simplex $V = \frac{1}{24} \cdot V_r$
- ...
- n-simplex $V = \frac{1}{n!} \cdot V_r$

(porovnání s objemem příslušného rovnoběžnostěnu)

Zobecnění – vrcholy, hrany a stěny jehlanu v n-rozměrném prostoru

útvar	vrcholů	hran	stěn	...
úsečka	2	1		
trojúhelník	3	3	1	
čtyřstěn	4	6	4	1
4-simplex	5	10	10	5
...	...	...	...	
n-simplex	$n+1$			

čtyřstěn:

- vrcholů (0rozměrných útvarů): $4 = \binom{4}{1}$

- hran (1rozměrných útvarů): $6 = \binom{4}{2}$ (2 vrcholy tvoří hranu)

- stěn (2rozměrných útvarů): $4 = \binom{4}{3}$ (3 vrcholy tvoří stěnu)

- těles (3rozměrných útvarů): $1 = \binom{4}{4}$ (4 vrcholy tvoří čtyřstěn)

Literatura

Boltyanskii V. G.: *Tret'ya problema Gil'berta.* Nauka, Moskva, 1977.

Bricard R.: *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres.* Nouvelles annales de mathématiques, III, 15(1896), 331-334.

Dehn M.: *Über raumgleiche Polyeder.* Nachrichten Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900, 345–354.

Dehn M.: *Über den Rauminhalt.* Math. Ann. 55(1902), 465–478.

Carl Friedrich Gauss Werke. VIII. Teubner, Leipzig, 1900.

Hadwiger H.: *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder.* Mathematische Annalen 127(1954), 170–174.

Hilbert D.: *Mathematische Probleme.* Archiv der Mathematik und Physik III 1(1901), 44–63, 213–237.

Kagan, V. F.: *Über die Transformation der Polyeder.* Math. Ann. 57(1903), 421–424.

Sydler J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions.* Comment. Math. Helv. 40(1965), 43–80.