Matematická analýza II

Literatura

Literatura k předmětu:

[Rm] M. Rmoutil: *Matematická analýza II (NMTM102).* Praha, 2025.
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rmoutil/NMTM102/MA2.pdf`

Literatura pro zájemce (možnost nahlédnout i jinam):

[Pi] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: Matematická analýza (předběžná verze), Praha, 2024.
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty.pdf`

Osnova zkouškového testíku:

1. definice ze všech oblastí (primitivní funkce, Riemannův integrál, Taylorův polynom)

2. úloha: hledání primitivní funkce
3. teoretické otázky (věty, důkazy) z tématu *primitivní funkce*

4. úloha: aplikace Riemannova integrálu (obsah, objem, povrch, těžiště)
5. teoretické otázky (věty, důkazy) z tématu *Riemannův integrál*

6. úloha: Taylorův polynom a jeho aplikace (výpočet hodnoty funkce se zadanou přesností, výpočet limity funkce)
   očekává se znalost pěti základních rozvojů: $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$
7. teoretické otázky (věty, důkazy) z tématu *Taylorův polynom*

Podmínky splnění:

1. je třeba prokázat dobrou znalost odpřednášené látky
2. nelze pominout žádnou z oblastí (primitivní funkce, Riemannův integrál, Taylorův polynom)
3. nelze pominout žádnou z částí (početní část, teoretická část)

Probíráno na jednotlivých přednáškách

Primitivní funkce

19. 2.

- základy: definice PF, PF se liší o konstantu (a důsledky pro značení), prozatím bez důk.: spojitá funkce má PF
- přímé důsledky metod výpočtu derivací: tabulkové integrály, linearita, per-partes, 1. a 2. věta o substituci

26. 2.

- důkazy vět z předchozí přednášky
- integrace racionálních funkcí: vydělení polynomu polynomem, rozklad na parciální zlomky, integrace parciálních zlomků prvního a druhého druhu

5. 3.

- integrace racionálních funkcí: příklad na rozklad na parciální zlomky, integrál I_n (rekurentní vztah)
- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x, \quad \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \neq 0$
- $\int R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, ..., \sqrt[n]{x}\right) \mathrm{d}x$
- $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$: Eulerovy substituce

12. 3.

- hyperbolické funkce
- užití goniometrických a hyperbolických funkcí (aplikace $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)
- $\int R(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}x$, integrace goniometrických funkcí, substituce $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (včetně odvození vyjádření $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ pomocí $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$)
- výpočet určitého integrálu, souvislost s obsahem, nezáporné a záporné funkce

19. 3. aplikace Riemannova integrálu

- obsah „podgrafu“ funkce $y = f(x)$, obsah oblasti vymezené křivkou zadanou parametricky ($[x(t), y(t)]$) a v polárních souřadnicích ($\varrho = \varrho(\varphi)$, příklad: obsah kruhu)
- objem rotačního tělesa
- obsah pláště rotačního tělesa
- těžiště tenké homogenní desky, „statický moment“ vzhledem k ose x a y, souřadnice těžiště ($T = [S_y/S, S_x/S]$)
- zobecněná primitivní funkce

26. 3.

- vyšší transcendenty: $\int e^{\pm x^2}\mathrm{d}x$, $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, ...

Riemannův integrál

26. 3.

- Darbouxova definice Riemannova integrálu (D3.1)
- vlastnosti horních a dolních součtů (L3.4, L3.6, L3.7), zjemnění dělení (D3.5)

2. 4.

- riemannovská integrovatelnost, Bolzanova-Cauchyova podmínka (L3.10)
- existence Riemannova integrálu na podintervalu (V3.11)
- doplnění definice Riemannova integrálu (D3.12)
- Riemannův integrál jako lineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ (P3.17)

9. 4.

- linearita Riemannova integrálu (V3.14)
- Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná (Př3.9)

16. 4.

- integrál a znamení nerovnosti, integrál a absolutní hodnota (V3.18) + protipříklad k neplatnosti obrácené implikace s modifikovanou Dirichletovou funkcí
- stejnoměrná spojitost (D3.21, P3.22, Př3.23, V3.24 bez důkazu, jen náhled)
- riemannovská integrovatelnost monotónních a spojitých funkcí (V3.27, V3.26)
- f spojitá $\implies F(x) := \displaystyle\int_c^x f$ má derivaci a $F' = f \quad$ (V3.30)

23. 4.

- dokončení důkazu V3.30 (lim = 0)
- věta o existenci primitivní funkce (Důsl. 3.31)
- Základní věta kalkulu – Newtonova-Leibnizova formule (V3.32)
- definice Newtonova integrálu (D3.39)
- Newtonův a Riemannův integrál jsou si rovny, pokud oba existují (automaticky platí např. pro spojité funkce)
- Riemannova definice Riemannova integrálu
- nevlastní integrál