Matematická analýza II

Literatura k předmětu:

[Rm] M. Rmoutil: *Matematická analýza II (NMTM102).* Praha, 2025.
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rmoutil/NMTM102/MA2.pdf`

Další literatura k předmětu:

[Pi] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: Matematická analýza (předběžná verze), Praha, 2024.
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty.pdf`

Osnova zkouškového testíku:

1. úloha: Taylorův polynom a jeho aplikace (výpočet hodnoty funkce se zadanou přesností, výpočet limity, znalost pěti základních rozvojů: $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$
2. teoretická otázka (definice, věty, důkazy) z tématu *Taylorův polynom*

3. úloha: hledání primitivní funkce
4. teoretická otázka (definice, věty, důkazy) z tématu *primitivní funkce*

5. úloha: aplikace Riemannova integrálu (obsah, objem, povrch, těžiště)
6. teoretická otázka (definice, věty, důkazy) z tématu *Riemannův integrál*

Tematické okruhy ke zkoušce

Taylorův polynom

Primitivní funkce

1. ...
2. integrace racionálních funkcí: vydělení polynomu polynomem, rozklad na parciální zlomky, integrace parciálních zlomků prvního a druhého druhu
3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$
4. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$: Eulerovy substituce, užití goniometrických a hyperbolických funkcí (aplikace $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)
5. $\int R\left(\cos x, \sin x\right) \mathrm{d}x$, integrace goniometrických funkcí, substituce $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (včetně odvození vyjádření $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ pomocí $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$)
6. $\int e^{x^2} \mathrm{d}x$, $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x$, ...
7. zobecněná primitivní funkce

Riemannův integrál

1. D3.1 Darbouxova definice Riemannova integrálu: dělení, dolní a horní Darbouxův integrální součet, dolní a horní Riemannův integrál, Rienammův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$, funkce riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, množina všech riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a, b]$, $\mathcal{R}([a, b])$.
2. Pozn. 3.3 – implicitní předpoklady, nutnost předpokladu omezenosti funkce
3. L3.4 dolní součet je menší nebo roven hornímu součtu, omezenost integrálních součtů
4. D3.5 zjemnění dělení
5. L3.6 nerovnosti mezi integrálními součty příslušnými zjemnění dělení
6. L3.7 nerovnost mezi dolním a horním součtem pro různá dělení
7. Pozn. 3.8 pouhé shrnutí předchozích úvah
8. Př. 3.9 Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná
9. L3.10 nutné a postačující podmínky riemannovské integrovatelnosti,
   (ii) podmínka Bolzanova-Cauchyova typu
10. V3.11 existence Riemannova integrálu na podintervalu, aditivita vzhledem k intervalu
11. D3.12 dodefinování Riemannova integrálu na degenerovaném intervalu a pro zaměněné meze
12. Pozn. 3.13 aditivita Riemannova integrálu vzhledem k intervalu pro obecné rozložení horních a dolních mezí
13. V3.14 linearita Riemannova integrálu (je homogenní a aditivní)
14. Cv. 3.15 pozorování pro suprema a infima (umět ukázat na příkladu)
15. Pozn. 3.17 $\mathcal{R}([a, b])$ je vektorový prostor (ověřujeme, že je vektorovým podprostorem prostoru všech funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$, stačí tedy ověřit uzavřenost vůči sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem) a Riemannův integrál je lineární funkcionál (lineární forma, homomorfismus, ...)
16. V3.18 Riemannův integrál zachovává nerovnosti mezi integrandy, nerovnost mezi integrálem funkce a integrálem její absolutní hodnoty (s důkazem, ve skriptu chybí, byl pouze na přednášce)
17. Pozn. 3.19 absolutní konvergence Riemannova integrálu
18. Př. 3.20 ilustrace neplatnosti implikace $\exists \int_a^b |f| \implies \int_a^b f$ (modifikovaná Dirichletova funkce)

Existence Riemannova integrálu

19. V3.27 existence Riemannova integrálu pro monotónní funkce
20. D3.21 stejnoměrná spojitost
21. Pozn. 3.22 souvislost definic spojitosti a stejnoměrné spojitosti
22. Př. 3.23 příklad spojité funkce, která není na daném intervalu spojitá stejnoměrně

23. V3.24 stejnoměrná spojitost spojité funkce na (omezeném) uzavřeném intervalu
24. V3.26 existence Riemannova integrálu pro spojité funkce
25. Důsl. 3.29 změna funkce v konečně mnoha bodech nemá na hodnotu Riemannova integrálu vliv (bez důkazu, pouze „úkaz“)

Základní věta kalkulu

26. **V3.30** Riemannův integrál jako funkce horní meze je primitivní funkcí k integrandu
27. Důsl. 3.31 ke spojité funkci existuje funkce primitivní (věta o existenci primitivní funkce)
28. V3.32 Newtonova-Leibnizova formule
29. Př. 3.34 pozor na neomezenost integrandu
30. jen formou poznámky: per-partes a substituce pro Riemannův integrál (V3.35, V3.36, V3.37, ale nezkouší se)
31. D3.39 Newtonův integrál
32. Pozn. 3.42 Newtonův a Riemannův integrál jsou si rovny, pokud oba existují

Riemannova definice Riemannova integrálu

33. D3.45 Riemannova definice Riemannova integrálu, výběr (dělení s vyznačenými body), Riemannův integrální součet, norma dělení
34. Cv. 3.46 (i)
35. nezkouší se, ale je hezké: Pozn. 3.48
36. V3.49 bez důkazu: ekvivalence Darbouxovy a Riemannovy definice

Zobecněný (též nevlastní) Riemannův integrál

37. úvod: integrál nevlastní vlivem meze a funkce
38. D3.51 zobecněný Riemannův integrál
39. Důsl. 3.54 (bez důkazu, jen pro uvědomění si): má-li funkce Riemannův integrál, má také zobecněný Riemannův integrál
40. T3.53 (bez důkazu, i když je snadný a důležitý): Riemannův integrál jako funkce horní meze je spojitý

Aplikace Riemannova integrálu

41. obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce a osou x, dvěma grafy funkce, křivkou zadanou parametricky, křivkou zadanou rovnicí v polárních souřadnicích
42. objem rotačního tělesa (osa rotace je osou x)

43. délka křivky (supremum délek vepsaných lomených čar, rektifikovatelná křivka), výpočet pomocí Riemannova integrálu: křivka zadaná parametricky, délka grafu spojitě diferencovatelné funkce

44. povrch rotačního tělesa (osa rotace je osou x)

45. těžiště homogenní rovinné desky

46. těžiště křivky (nezkouší se)