Matematická analýza I

Jak jsme postupovali na přednášce: zde v txt (Uložit odkaz jako)

Materiály – teorie

- Základní skriptum: zde v pdf
- Rozsáhlejší referenční skriptum (kdyby se někdo chtěl podívat i jinam): zde v pdf

Materiály – úlohy

- Řešené úlohy – průběh funkce: zde v pdf
- Řešené úlohy – limity posloupností a funkcí (Pošta): zde v pdf
- Řešené úlohy – limity, spojitost, derivace (Vanžura): zde v pdf

- kniha pro úplné začátečníky: Polák J.: Středoškolská matematika v úlohách II
- sbírka pokrývající všechna témata: Černý I.: Úvod do inteligentního kalkulu

Co bude požadováno z úvodní kapitoly skript

- obměněná implikace, důkaz sporem, ... (poslední 4 řádky na str. 2)
- negace aplikovaná na výrok s kvantifikátorem (první bod na str. 3)
- umět používat $\subseteq, \in, \cup, \cap, \setminus, \times$ (viz str. 4)
- umět definice: zobrazení, definiční obor, obor hodnot, zobrazení z množiny / množiny, zobrazení prosté a na, bijekce; inverzní zobrazení (klíčová je prostota), reálná funkce, složené zobrazení (viz str. 5 a 6)
- množina spočetná a nekonečná spočetná (stačí představa, viz str. 6)
- definice reálných čísel pomocí desetinných rozvojů (viz str. 9)
- celá kapitola 1.3.4 Věta o supremu a její důsledky (důkazy se nezkoušejí)
- celá kapitola 1.3.5 Rozšířená definice suprema a infima

Co bude požadováno z 6. kapitoly skript

- l'Hospitalovo pravidlo – pouze znění (bez důkazu)
- Cauchyova věta o střední hodnotě – pouze znění (bez důkazu)
- definice posloupnosti splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (cauchyovské, fundamentální)
- věta 6.3: posloupnost je konvergentní $\iff$ je cauchyovská – pouze znění (bez důkazu)
- modifikované věty 6.4 a 6.5 o zavedení funkcí exp (e^x), sin, cos – pouze znění (bez důkazu)

Matematická analýza I – ukázkový testík

testík je mírně rozsáhlejší, slouží spíše pro procvičení

Definujte: (nekonečnou) posloupnost reálných čísel, limita funkce, funkce rostoucí v bodě a na intervalu, derivace funkce v bodě, nekonečná číselná řada

1. Vypočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\sqrt[n]{3}-1\right) \cdot \operatorname{arctg} 3n$$

2. Zformulujte a dokažte větu o tom, že z každé ... posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.

3. Vypočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

4. Zformulujte a dokažte Heineho větu.

5. a) Odvoďte z definice derivaci funkce sinus.
   b) Rozhodněte, zda je funkce $y = \frac{1}{x}$ klesající na celém svém definičním oboru.
   c) Rozhodněte, zda je funkce $y = x^3$ rostoucí na $\mathbb{R}$ a rostoucí v každém bodě $\mathbb{R}$.

6. Zformulujte a dokažte větu Bolzanovu o nabývání nulové hodnoty.

7. Najděte všechny lokální extrémy funkce dané předpisem

$$y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}\,.$$

   Za definiční obor považujte všechna reálná čísla, pro které má tento předpis smysl.
   U každého extrému rozhodněte, zda se jedná o lokální maximum, nebo lokální minimum.
   Rozhodněte, zda je tato funkce konkávní na celém svém definičním oboru.

8. Zformulujte a dokažte větu Rolleovu a Lagrangeovu.

9. Rozhodněte o konvergenci následujících nekonečných číselných řad.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 3n + 1}{10n^2 - 3n^4 + 15} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} n$$

10. Zformulujte a dokažte limitní srovnávací kritérium (pouze pro kladnou a konečnou hodnotu limity).