Geometrie I

Sbírka řešených příkladů

Jana Hromadová, Zdeněk Halas

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Sazba textu: Jiří Frantál

Sbírka vznikla v rámci projektu:
Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK, 2020

Obsah

1 Afinní prostor

Úloha 1.1 *Určete, zda* $A_n = (A, V_n, f)$ *tvoří afinní prostor, jestliže*

$$A = \mathbb{R}^2,$$
$$V_n = \mathbb{R}^2,$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \vec{u} \in V.$$

Úloha 1.2 *Určete, zda* $A_n = (A, V_n, f)$ *tvoří afinní prostor, jestliže*

$$A = \mathbb{R}^n,$$
$$V_n = \mathbb{R}^n,$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) = \vec{u} \in V.$$

Úloha 1.3 *Určete, zda* $A_n = (A, V_n, f)$ *tvoří afinní prostor, jestliže*

$$A = \mathbb{R}^3,$$
$$V_n = \mathbb{R}^3,$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = Y - X = (y_2 - x_1, y_3 - x_2, y_1 - x_3) = \vec{u} \in V.$$

Úloha 1.4 *Určete, zda* $A_n = (A, V_n, f)$ *tvoří afinní prostor, jestliže*

$$A = \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\right\},$$
$$V_n = \mathbb{R}^2,$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = \left(x_1 - y_1 + \log\frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \log\frac{x_2}{y_2}\right) = \vec{u} \in V.$$

Úloha 1.5 *Určete, zda* $A_n = (A, V_n, f)$ *tvoří afinní prostor, jestliže*

$$A = \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{16} = 1\right\},$$
$$V_n = \mathbb{R},$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = x_2 - y_2 = \vec{u} \in V.$$

Řešení.

1.1 Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru ($f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$).

$$X, Y, Z \in A$$

$$X = [x_1, x_2]$$
$$Y = [y_1, y_2]$$
$$Z = [z_1, z_2]$$

$$f(X, Y) + f(Y, Z) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) + (z_1 - y_1, z_2 - y_2) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2) = f(X, Z)$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru (je-li $P \in A$, $P = [p_1, p_2]$, pak $\forall X \in A$ lze jednoznačně přiřadit vektor $\vec{u} = \vec{PX}$; $\forall \vec{u} \in V\ \exists! X$ tak, že $\vec{u} = \overrightarrow{PX}$).

$$\vec{u} = \overrightarrow{PX} = (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{ll} u_1 = x_1 - p_1 & x_1 = u_1 + p_1 \\ u_2 = x_2 - p_2 & x_2 = u_2 + p_2 \end{array}}_{\text{jednoznačné vyjádření}}$$

Ke každému vektoru $\vec{u} \in V$ tedy existuje právě jeden bod $X \in A$ tak, že $\vec{u} = f(P, X)$, zobrazení f má tedy i 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

Trojice (A, V_n, f) je tedy afinní prostor.

1.2 Postup stejný jako v příkladu 1.

1.3 A je neprázdná množina, V vektorový prostor. Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru ($f(X,Y) + f(Y,Z) = f(X,Z)$).

$$\begin{aligned} L:\ & (y_2 - x_1, y_3 - x_2, y_1 - x_3) + (z_2 - y_1, z_3 - y_2, z_1 - y_3) \\ & = (z_2 - x_1 + y_2 - y_1, z_3 - x_2 + y_3 - y_2, z_1 - x_3 + y_1 - y_3) \\ P:\ & (z_2 - x_1, z_3 - x_2, z_1 - x_3) \end{aligned}$$

$L \neq P \implies$ nejedná se o afinní prostor.

1.4 Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru. Využijeme přitom vlastnost logaritmů

$$\log \frac{x_2}{y_2} + \log \frac{y_2}{z_2} = \log \frac{x_2}{z_2}.$$

$$\begin{aligned} f(X,Y) + f(Y,Z) &= \left(x_1 - y_1 + \log \frac{x_2}{y_2} + y_1 - z_1 + \log \frac{y_2}{z_2}, x_1 - y_1 - \log \frac{x_2}{y_2} + y_1 - z_1 - \log \frac{y_2}{z_2}\right) \\ &= \left(x_1 - z_1 + \log \frac{x_2}{z_2}, x_1 - z_1 - \log \frac{x_2}{z_2}\right) = f(X,Z) \end{aligned}$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

Uvažujme $P = [p_1, p_2]$, kde $p_2 > 0$.

$$f(P,X) = \left(p_1 - x_1 + \log \frac{p_2}{x_2}, p_1 - x_1 - \log \frac{p_2}{x_2}\right)$$

Zvolme $\vec{u} \in V$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a hledejme $X \in A$ tak, aby platilo $f(P,X) = \vec{u}$.

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 - x_1 + \log \frac{p_2}{x_2} \\ u_2 &= p_1 - x_1 - \log \frac{p_2}{x_2} \end{aligned}$$

Sečtením, resp. odečtením rovnic získáme

$$\begin{aligned} 2p_1 - 2x_1 &= u_1 + u_2, \\ 2\log \frac{p_2}{x_2} &= u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Odtud ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2p_1 - u_1 - u_2}{2}, \\ x_2 &= p_2 \cdot 10^{\frac{u_2 - u_1}{2}}. \end{aligned}$$

$\implies \exists!\ X \implies$ zobrazení f splňuje i 2. vlastnost.

Trojice (A, V_n, f) tedy tvoří dvojrozměrný afinní prostor.

1.5 Obecně platí, že dimenze množiny bodů je rovna dimenzi vektorového prostoru. Body A tvoří křivku, tj. jednorozměrný objekt. $V = \mathbb{R}$ je jednorozměrný vektorový prostor.

Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru.

$$X, Y, Z \in A$$

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2] \\ Y &= [y_1, y_2] \\ Z &= [z_1, z_2] \end{aligned}$$

$$f(X,Y) + f(Y,Z) = x_2 - y_2 + y_2 - z_2 = x_2 - z_2 = f(X,Z)$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{PX} \\ P &= [p_1, p_2] \\ X &= [x_1, x_2] \end{aligned}$$

$$f(P,X) = p_2 - x_2$$

Vektor $\vec{u}$ je jednodimenzionální.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u) \\ u &= p_2 - x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= p_2 - u \\ x_1 &= \pm\sqrt{\frac{114 - 9x_2^2}{16}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ vyjádření není jednoznačné, dvěma různým bodům přiřadí stejný vektor.

Trojice (A, V_n, f) netvoří afinní prostor.

□

2 Lineární soustava souřadnic

Úloha 2.1 *V afinním prostoru A_2 je dán trojúhelník ABC. Zvolte pomocí vrcholů A, B, C lineární soustavu souřadnic, určete souřadnice bodů A, B, C, S_{BC}, T (těžiště).*

Úloha 2.2 *V afinním prostoru A_2 je dán rovnoběžník $ABCD$. Určete souřadnice jeho vrcholů ve zvolené lineární soustavě souřadnic.*

Úloha 2.3 *V afinním prostoru A_3 je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete souřadnice jejích vrcholů vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry*

a) $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$,
b) $\mathcal{S} = \langle F; D - F, G - F, H - F \rangle$,
c) $\mathcal{T} = \langle D; E - D, H - D, G - D \rangle$.

Úloha 2.4 *V afinním prostoru A_3 je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Určete souřadnice jeho vrcholů vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry*

a) $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$,
b) $\mathcal{S} = \langle F; D - F, G - F, H - F \rangle$,
c) $\mathcal{T} = \langle D; E - D, H - D, G - D \rangle$.

Úloha 2.5 *Je dán afinní prostor* $A_2 = (A, V, f)$, *kde*

$$A = \mathbb{R}^2,$$
$$V = \mathbb{R}^2,$$
$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \vec{u} \in V.$$

Určete souřadnice bodů $B = [2, 3]$, $C = [-3, 5]$, $D = [0, -1]$, $E = [0, 0]$ *vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry*

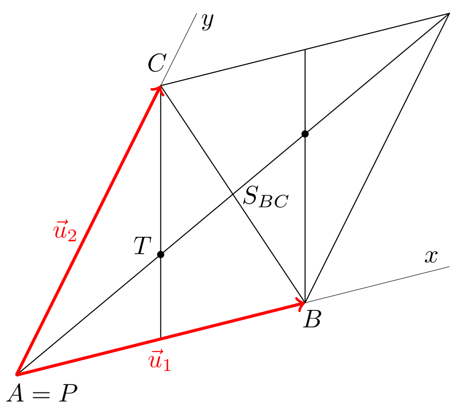
a) $\mathcal{R} = \langle [1, 1] ; (1, 2) , (0, 1) \rangle$,
b) $\mathcal{S} = \langle [2, -1] ; (2, 2) , (1, -1) \rangle$.

Úloha 2.6 *Určete souřadnice bodů* $K = A + (3\vec{u} + \vec{v})$, $L = A + (\vec{u} + 2\vec{v}) \in A_4$ *vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem* $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$, *kde*

$$A = P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) ,$$
$$\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3,$$
$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Řešení.

2.1

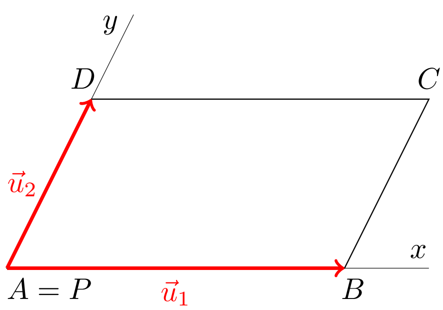


$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, C - A \rangle$$
$$A = [0, 0] \quad \text{počátek}$$

$$B - A = b_1 (B - A) + b_2 (C - A)$$
$$B = A + b_1 (B - A) + b_2 (C - A)$$
$$B = [b_1, b_2]$$

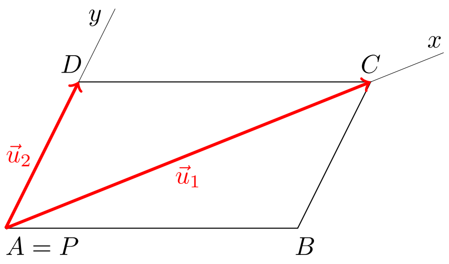
$$A\,[0, 0] \qquad B\,[1, 0] \qquad C\,[0, 1] \qquad S_{BC} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \qquad T \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

2.2



$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle$$

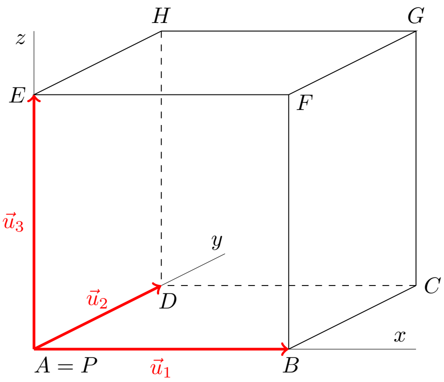
$$A = [0, 0] = P$$
$$B = [1, 0]$$
$$C = [1, 1]$$
$$D = [0, 1]$$



$$\mathcal{R} = \langle A; C - A, D - A\rangle$$

$$\begin{aligned} A &= [0,0] = P \\ C &= [1,0] \\ D &= [0,1] \\ B &= [1,-1] \end{aligned}$$

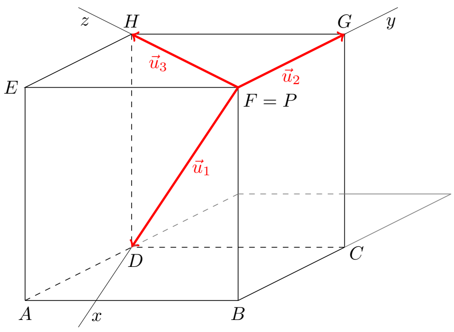
2.3 a)



$$\begin{aligned} B - A &= b_1\,(B - A) + b_2\,(D - A) + b_3\,(E - A) \\ B &= A + b_1\,(B - A) + b_2\,(D - A) + b_3\,(E - A) \\ B &= [b_1, b_2, b_3] \end{aligned}$$

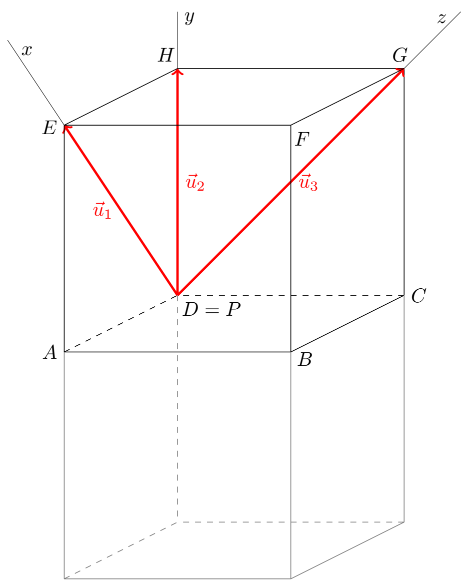
$A = [0,0,0] = P$	$E = [0,0,1]$
$B = [1,0,0]$	$F = [1,0,1]$
$C = [1,1,0]$	$G = [1,1,1]$
$D = [0,1,0]$	$H = [0,1,1]$

b)



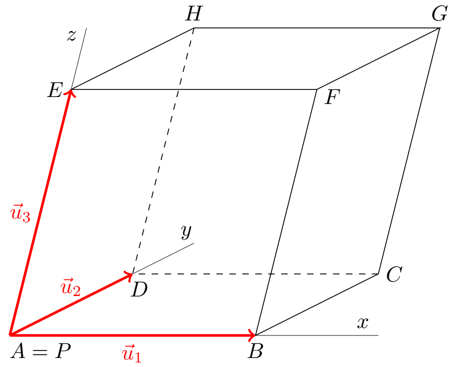
$A = [1,-1,0]$	$E = [0,-1,1]$
$B = [1,0,-1]$	$F = [0,0,0] = P$
$C = [1,1,-1]$	$G = [0,1,0]$
$D = [1,0,0]$	$H = [0,0,1]$

c)



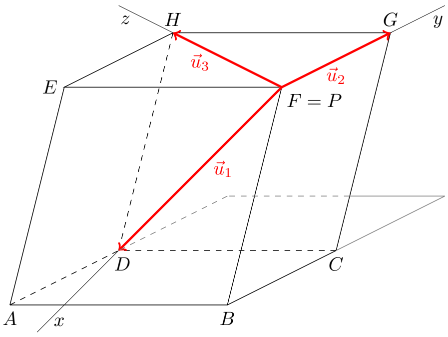
$A = [1,-1,0]$	$E = [1,0,0]$
$B = [1,-2,1]$	$F = [1,-1,1]$
$C = [0,-1,1]$	$G = [0,0,1]$
$D = [0,0,0] = P$	$H = [0,1,0]$

2.4 a)



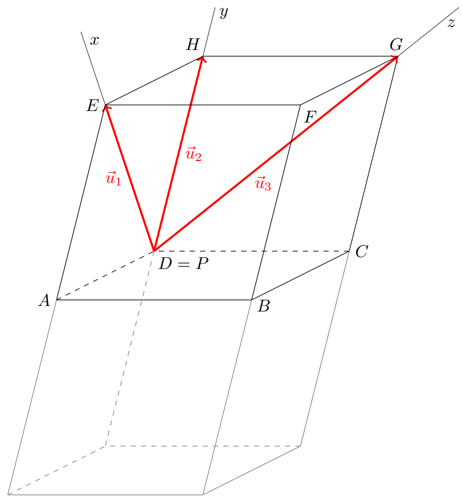
$$A = [0,0,0] = P \qquad E = [0,0,1]$$
$$B = [1,0,0] \qquad F = [1,0,1]$$
$$C = [1,1,0] \qquad G = [1,1,1]$$
$$D = [0,1,0] \qquad H = [0,1,1]$$

b)



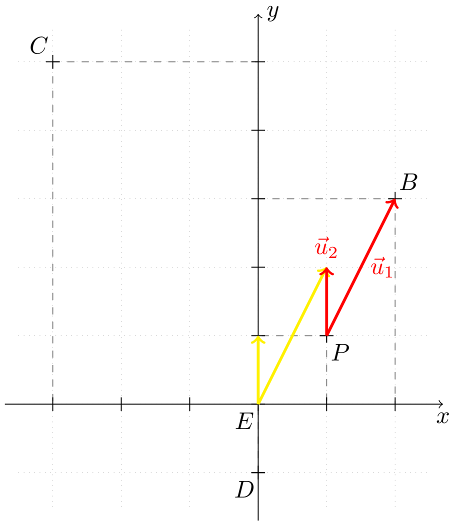
$$A = [1,-1,0] \qquad E = [0,-1,1]$$
$$B = [1,0,-1] \qquad F = [0,0,0] = P$$
$$C = [1,1,-1] \qquad G = [0,1,0]$$
$$D = [1,0,0] \qquad H = [0,0,1]$$

c)



$$A = [1,-1,0] \qquad E = [1,0,0]$$
$$B = [1,-2,1] \qquad F = [1,-1,1]$$
$$C = [0,-1,1] \qquad G = [0,0,1]$$
$$D = [0,0,0] = P \qquad H = [0,1,0]$$

2.5 a)



$$B = P + b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$[2,3] = [1,1] + b_1\,(1,2) + b_2\,(0,1)$$

$$2 = 1 + b_1$$
$$3 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$b_1 = 1$$

$$3 = 1 + 2 + b_2$$
$$b_2 = 0$$

$$\underline{\underline{B_{\mathcal{R}} = [1,0]}}$$

$$C = P + c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$[-3,5] = [1,1] + c_1\,(1,2) + c_2\,(0,1)$$

$$-3 = 1 + b_1$$
$$5 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$c_1 = -4$$

$$5 = 1 - 8 + c_2$$
$$c_2 = 12$$

$$\underline{\underline{C_{\mathcal{R}} = [-4,12]}}$$

$$D = P + d_1 \cdot \vec{u}_1 + d_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$[0,-1] = [1,1] + d_1\,(1,2) + d_2\,(0,1)$$

$$0 = 1 + b_1$$
$$-1 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$d_1 = -1$$

$$-1 = 1 - 2 + d_2$$
$$d_2 = 0$$

$$\underline{\underline{D_{\mathcal{R}} = [-1,0]}}$$

$$E = P + e_1 \cdot \vec{u}_1 + e_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$[0,0] = [1,1] + e_1\,(1,2) + e_2\,(0,1)$$

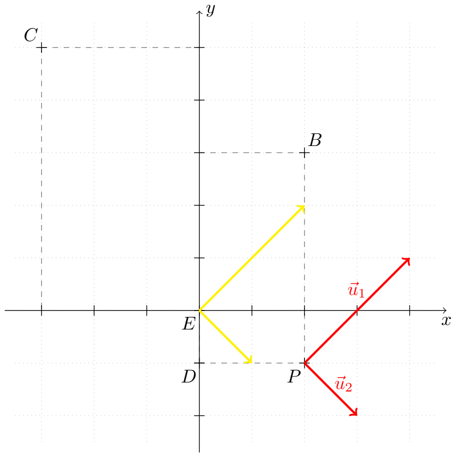
$$0 = 1 + b_1$$
$$0 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$e_1 = -1$$

$$0 = 1 - 2 + d_2$$
$$e_2 = 1$$

$$\underline{\underline{E_{\mathcal{R}} = [-1,1]}}$$

b)



$$B = P + b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$[2,3] = [2,-1] + b_1\,(2,2) + b_2\,(1,-1)$$

$$2 = 2 + 2b_1 + b_2$$
$$3 = -1 + 2b_1 - b_2$$

$$5 = 1 + 4b_1$$

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = -2$$

$$\underline{\underline{B_{\mathcal{S}} = [1,-2]}}$$

$$\underline{\underline{C_{\mathcal{S}} = \left[\frac{1}{4}, -\frac{11}{2}\right]}} \qquad \underline{\underline{D_{\mathcal{S}} = \left[-\frac{1}{2}, -1\right]}} \qquad \underline{\underline{E_{\mathcal{S}} = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right]}}$$

2.6

$$\begin{aligned} K &= P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + 3\,(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3) + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4) \\ &= P + 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + \vec{e}_4 \\ &\qquad\qquad \implies K = [5,6,-7,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3) + 2\,(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4) \\ &= P + 4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 \\ &\qquad\qquad \implies L = [4,9,-3,2] \end{aligned}$$

□

3 Transformace lineární soustavy souřadnic

Úloha 3.1 *V afinním prostoru A_2 jsou dány body $P = [-1,3]$, $P' = [2,-3]$ a vektory $\vec{u} = (1,4)$, $\vec{v} = (5,2)$, $\vec{u'} = (6,6)$, $\vec{v'} = (-3,6)$. Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ určené repérem $\mathcal{R} = \langle P; \vec{u}, \vec{v}\rangle$ na lineární soustavu souřadnic $\mathcal{L}'$ určenou repérem $\mathcal{S} = \left\langle P'; \vec{u'}, \vec{v'}\right\rangle$.*

Úloha 3.2 *V afinním prostoru A_2 jsou dány dvě lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ určené repéry $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ a $\mathcal{S} = \left\langle Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\right\rangle$. Dále jsou dány souřadnice bodu $P_{\mathcal{S}} = [2,-1]$ a vektorů $\langle \vec{e}_1\rangle_{\mathcal{L}'} = (1,-3)$, $\langle \vec{e}_2\rangle_{\mathcal{L}'} = (-1,1)$ vzhledem k soustavě $\mathcal{L}'$.*

a) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ určené repérem $\mathcal{R}$ na lineární soustavu souřadnic $\mathcal{L}'$ určenou repérem $\mathcal{S}$.
b) Určete souřadnice bodu D vzhledem k soustavě $\mathcal{L}'$, je-li $D_{\mathcal{R}} = [0,3]$.
c) Napište analytické vyjádření přímky p vzhledem k soustavě $\mathcal{L}$, je-li dáno její analytické vyjádření vzhledem k $\mathcal{L}'$, tj. $p : 2x' - y' + 1 = 0$.

Úloha 3.3 *Napište inverzní transformaci k předchozí úloze, tj. transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}'$ určené repérem $\mathcal{S}$ na lineární soustavu souřadnic $\mathcal{L}$ určenou repérem $\mathcal{R}$.*

Úloha 3.4 *V afinním prostoru* A_2 *je dána lineární soustava souřadnic* $\mathcal{L}$ *určená repérem* $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$*. Dále jsou dány souřadnice bodů* $Q = [5, -2]$, $T = [2, 1]$ *a vektorů* $\langle \vec{u} \rangle_{\mathcal{L}} = (-1, 2)$, $\langle \vec{v} \rangle_{\mathcal{L}} = (2, 4)$ *vzhledem k soustavě souřadnic* $\mathcal{L}$.

a) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ *určené repérem* $\mathcal{R}$ *na lineární soustavu souřadnic* $\mathcal{L}'$ *určenou repérem* $\mathcal{S} = \langle Q; \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
b) Určete souřadnice bodu T *vzhledem k soustavě* $\mathcal{L}'$.

Úloha 3.5 *V afinním prostoru* A_2 *je dán rovnoběžník* $ABCD$ *se středem* O *a lineární soustava souřadnic* $\mathcal{L}$ *určená repérem* $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle$.

a) Určete souřadnice bodů A, B, C, D, O *vzhledem k soustavě* $\mathcal{L}$.
b) Určete souřadnice bodů A, B, C, D, O *vzhledem k soustavě* $\mathcal{L}'$, *která je dána repérem* $\mathcal{S} = \langle O; D - O, C - O \rangle$.
c) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ *určené repérem* $\mathcal{R}$ *na lineární soustavu souřadnic* $\mathcal{L}'$ *určenou repérem* $\mathcal{S}$.
d) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}'$ *určené repérem* $\mathcal{S}$ *na lineární soustavu souřadnic* $\mathcal{L}$ *určenou repérem* $\mathcal{R}$.

Úloha 3.6 *V afinním prostoru* A_3 *je dán rovnoběžnostěn* $ABCDEFGH$ *se středem* O *a lineární soustava souřadnic* $\mathcal{L}$ *určená repérem* $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$.

a) Určete souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu vzhledem k soustavě $\mathcal{L}$.
b) Určete souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu vzhledem k soustavě $\mathcal{L}'$, *která je dána repérem* $\mathcal{S} = \langle C; B - C, D - C, G - C \rangle$.
c) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}$ *určené repérem* $\mathcal{R}$ *na lineární soustavu souřadnic* $\mathcal{L}'$ *určenou repérem* $\mathcal{S}$.
d) Napište transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathcal{L}'$ *určené repérem* $\mathcal{S}$ *na lineární soustavu souřadnic* $\mathcal{L}$ *určenou repérem* $\mathcal{R}$.

Řešení.

3.1

$$X_{\mathcal{S}} = A \cdot X_{\mathcal{R}} \qquad \begin{aligned} X_{\mathcal{R}} &= P + x_1\vec{u} + x_2\vec{v} \\ X_{\mathcal{S}} &= P' + x_1'\vec{u'} + x_2'\vec{v'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= [p_1, p_2]_{\mathcal{S}} \\ P &= P' + p_1\vec{u'} + p_2\vec{v'} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 2 + 6p_1 - 3p_2 \qquad / \cdot 2 \\ 3 &= -3 + 6p_1 + 6p_2 \end{aligned}\right) +$$

$$1 = 1 + 18p_1 \longrightarrow \underline{\underline{p_1 = 0}}, \quad \text{dosadíme do } (II)\text{:} \quad 3 = -3 + 6p_2 \longrightarrow \underline{\underline{p_2 = 1}}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{S}}$$
$$\vec{u} = u_1\vec{u'} + u_2\vec{v'}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 6u_1 - 3u_2 \quad / \cdot 2 \\ 4 &= 6u_1 + 6u_2 \end{aligned}\right)+$$

$$6 = 18u_1 \longrightarrow \underline{\underline{u_1 = \frac{1}{3}}}, \qquad \text{dosadíme do } (II): \quad 1 = 2 - 3u_2 \longrightarrow \underline{\underline{u_2 = \frac{1}{3}}}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{S}}$$
$$\vec{v} = v_1\vec{u'} + v_2\vec{v'}$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 6v_1 - 3v_2 \quad / \cdot 2 \\ 2 &= 6v_1 + 6v_2 \end{aligned}\right)+$$

$$12 = 18v_1 \longrightarrow \underline{\underline{v_1 = \frac{2}{3}}}, \qquad \text{dosadíme do } (II): \quad 5 = 4 - 3v_2 \longrightarrow \underline{\underline{v_2 = -\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y + 0 \\ y' &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y + 1 \end{aligned}}$$

Ověření $P' = [2, -3]$:

souřadnice P' vzhledem k $\mathcal{R}$: $$\left.\begin{aligned} 2 &= -1 + b_1 + 5b_2 \quad / \cdot (-4) \\ -3 &= 3 + 4b_1 + 2b_2 \end{aligned}\right)+$$

$$\begin{aligned} -11 &= 7 - 18b_2 \longrightarrow b_2 = 1 \\ -8 &= 4b_1 \longrightarrow b_1 = -2 \end{aligned}$$

$$P' = [-2, 1]_{\mathcal{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P' \text{ je počátek v } \mathcal{S}$$

3.2 a)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}} \qquad \mathcal{R} \to \mathcal{S} \quad \begin{aligned} x' &= x - y + 2 \\ y' &= -3x + y - 1 \end{aligned}$$

b)

$$D_{\mathcal{S}} = \quad ?$$
$$D_{\mathcal{R}} = [0,3]$$

Po dosazení $D_{\mathcal{R}}$ do transformace lineární soustavy souřadnic z a) dostaneme

$$D_{\mathcal{S}} = [-1,2]\,.$$

c)

$$p_{\mathcal{S}}: \quad 2x' - y' + 1 = 0$$

Po dosazení za x' a y' z a) dostaneme

$$p_{\mathcal{R}}: \quad 2\,(x-y+2) - (-3x+y-1) + 1 = 0,$$

$$5x - 3y + 6 = 0.$$

3.3

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 2 & \longrightarrow\quad 3\cdot(I)+(II): &\quad 3x' + y' = -2y + 5 \\ y' &= -3x + y - 1 & \longrightarrow\quad (I)+(II): &\quad x' + y' = -2x + 1 \end{aligned}$$

$$y = -\tfrac{3}{2}x' - \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{5}{2}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}x' - \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{1}{2}$$

Nebo využijeme inverzní matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 - 3 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

3.4 a) Potřebujeme určit souřadnice bodu P a vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ v nové lineární soustavě souřadnic $\mathcal{L}'$.

$P = [0,0]_{\mathcal{R}} \quad P = [p_1, p_2]_{\mathcal{S}}$

$$P = Q + p_1 \cdot \vec{u} + p_2 \cdot \vec{v}$$
$$[0,0] = [5,-2] + p_1\,(-1,2) + p_2\,(2,4)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 5 - p_1 + 2p_2 \quad /\cdot 2 \\ 0 &= -2 + 2p_1 + 4p_2 \end{aligned}\right) + \qquad /\cdot(-2) \quad \Big) +$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 8 + 8p_2 \longrightarrow p_2 = -1 \\ 0 &= -12 + 4p_1 \longrightarrow p_1 = 3 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{P = [3,-1]_{\mathcal{S}}}}$$

$$\vec{e}_1 = (1,0)_{\mathcal{R}} \qquad \vec{e}_1 = (x_1, x_2)_{\mathcal{S}} \qquad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= x_1 \cdot \vec{u} + x_2 \cdot \vec{v} \\ (1,0) &= x_1\,(-1,2) + x_2\,(2,4) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= -x_1 + 2x_2 \quad / \cdot 2 \\ 0 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}\right) + \qquad / \cdot (-2) \Big) +$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 8x_2 \longrightarrow x_2 = \tfrac{1}{4} \\ -2 &= 4x_1 \longrightarrow x_1 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_{\mathcal{S}}}}$$

$$\vec{e}_2 = (0,1)_{\mathcal{R}} \qquad \vec{e}_2 = (y_1, y_2)_{\mathcal{S}} \qquad \begin{aligned} \vec{e}_2 &= y_1 \cdot \vec{u} + y_2 \cdot \vec{v} \\ (0,1) &= y_1\,(-1,2) + y_2\,(2,4) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -y_1 + 2y_2 \quad / \cdot 2 \\ 1 &= 2y_1 + 4y_2 \end{aligned}\right) + \qquad / \cdot (-2) \Big) +$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 8y_2 \qquad y_2 = \tfrac{1}{8} \\ 1 &= 4y_1 \qquad y_1 = \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)_{\mathcal{S}}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}}$$

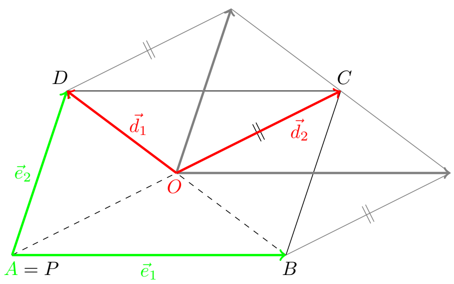
b)

$$T = [2,1]_{\mathcal{R}} \qquad \underline{\underline{T = \left[\frac{9}{4}, -\frac{3}{8}\right]_{\mathcal{S}}}}$$

3.5. a) neřešená úloha

b) neřešená úloha

c)



$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle = \langle A; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$$

$$\mathcal{S} = \langle O; D - O, C - O \rangle = \left\langle O; \vec{d}_1, \vec{d}_2 \right\rangle$$

$$O = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]_{\mathcal{R}} = [0,0]_{\mathcal{S}}$$

(později ověřím výpočtem)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= x + y - 1 \end{aligned}}$$

$$\langle A \rangle_{\mathcal{S}} \qquad \langle \vec{e}_1 \rangle_{\mathcal{S}} \qquad \langle \vec{e}_2 \rangle_{\mathcal{S}}$$

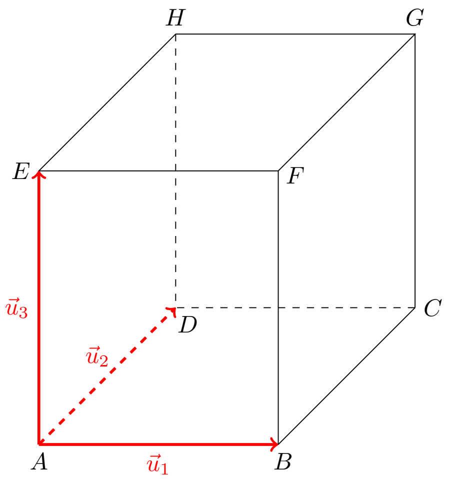
Ověření pro střed O:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ O = [0,0]_{\mathcal{S}}$$

d) neřešená úloha

3.6.



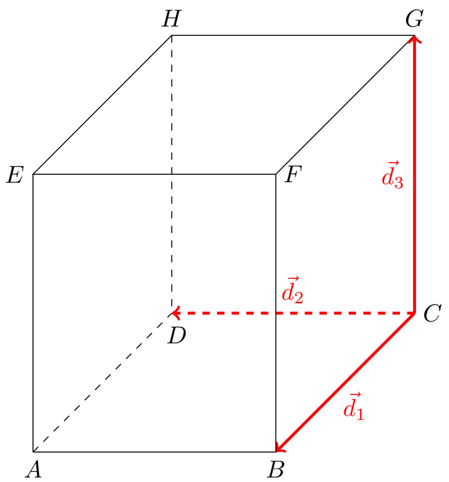
$$\begin{aligned} A &= [0,0,0]_{\mathcal{R}} & C &= [1,1,0]_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_1 &= (1,0,0)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_1 &= (0,-1,0)_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_2 &= (0,1,0)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_2 &= (-1,0,0)_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_3 &= (0,0,1)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_3 &= (0,0,1)_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

a) Jaké jsou souřadnice A, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_2$ vzhledem k $\mathcal{L}$?

Obecně: $\quad A = C + p_1'\vec{d}_1 + p_2'\vec{d}_2 + p_3'\vec{d}_3$

$$[0,0,0] = [1,1,0] + p_1'\,(0,-1,0) + p_2'\,(-1,0,0) + p_3'\,(0,0,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1' = 1 \\ p_2' = 1 \\ p_3' = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \ A = [1,1,0]_{\mathcal{S}}$$



$$\underbrace{\vec{u}_1 = (0,-1,0)_{\mathcal{S}} \quad \vec{u}_1 = (-1,0,0)_{\mathcal{S}} \quad \vec{u}_1 = (0,0,1)_{\mathcal{S}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x' &= -y + 1 \\ y' &= -x + 1 \\ z' &= z \end{aligned}$$

b)

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}$$

□

4 Lineární kombinace bodů

Úloha 4.1 *Pomocí lineární kombinace bodů odvoďte vztah pro výpočet středu úsečky AB.*

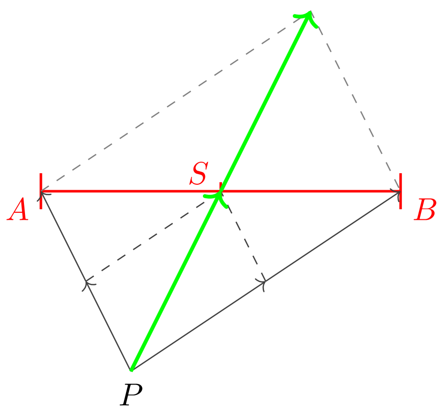
Úloha 4.2 *Pomocí lineární kombinace bodů odvoďte vztah pro výpočet těžiště $\triangle ABC$.*

Úloha 4.3 *Pomocí lineární kombinace bodů vyjádřete body přímky AB, polopřímky AB, polopřímky BA a úsečky AB.*

Úloha 4.4 *Jsou dány tři nekolineární body A, B, $C \in A_2$. Pomocí lineární kombinace bodů vyjádřete body poloroviny ABC, úhlu CAB a body uvnitř $\triangle ABC$.*

Řešení.

4.1



$$\begin{aligned}S &= P+\frac{1}{2}(A-P)+\frac{1}{2}(B-P)\\ &= P+\frac{1}{2}((A-P)+(B-P))\end{aligned}$$

P je libovolné, můžeme tedy zvolit i $P = A$.

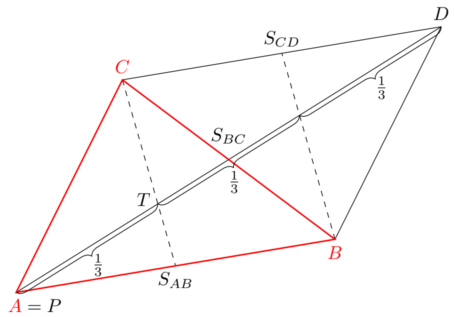
$$\begin{aligned}\implies S_{AB} &= A+\frac{1}{2}(B-A)\\ &= \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned}T &= P+\frac{1}{3}(A-P)+\frac{1}{3}(B-P)+\frac{1}{3}(C-P)\\ &= P+\frac{1}{3}[(A-P)+(B-P)+(C-P)]\end{aligned}$$

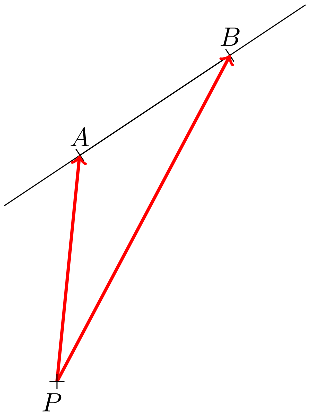
Pro $P = A$:

$$\begin{aligned}T &= A+\frac{1}{3}(B-A)+\frac{1}{3}(C-A)\\ &= \frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
T &= A + \frac{1}{3}\left[(C-A) + (B-A)\right] \\
&= A + \frac{1}{3}(C-A) + \frac{1}{3}(B-A) \\
&= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C
\end{aligned}
$$

4.3



Přímka AB:

$$\lambda A + \mu B = P + \lambda (A-P) + \mu (B-P),$$

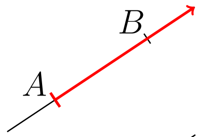
$$\mu + \lambda = 1.$$

Za počátek P zvolíme bod A, resp. bod B.

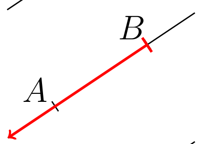
$$\implies A + \mu (B-A), \text{ resp. } B + \lambda (A-B)$$

$$\big(\text{a platí: } A + \mu (B-A) = B + \lambda (A-B)\big)$$

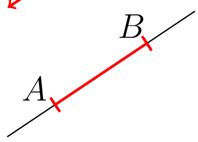
Odtud již jasně vidíme, že výsledkem lineární kombinace bodů AB jsou pouze body přímky AB.



pro $\mu \geq 0$: polopřímka AB



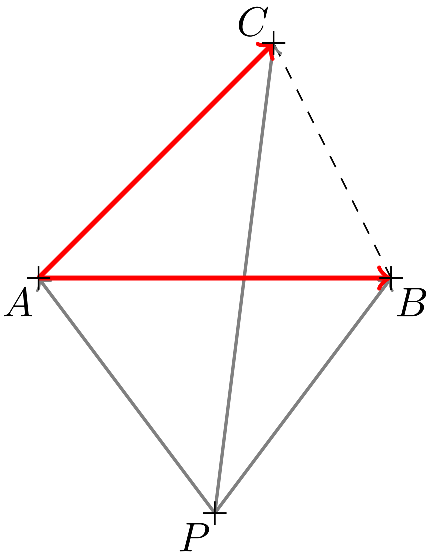
pro $\lambda \geq 0$: polopřímka BA



pro $\lambda, \mu \geq 0$ (nebo $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$): úsečka AB

(pozn. pro $\mu \leq 0$: polopřímka opačná k AB, tj. ne polopřímka BA)

4.4



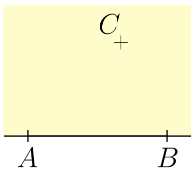
$$\lambda A+\mu B+\nu C = P+\lambda\,(A-P)+\mu\,(B-P)+\nu\,(C-P)\,,$$

$$\lambda+\mu+\nu=1.$$

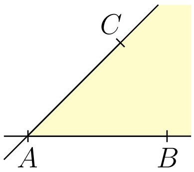
Za počátek P zvolíme A.

$$\Longrightarrow\quad A+\mu\,(B-A)+\nu\,(C-A)$$

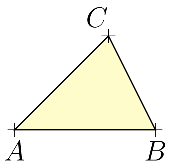
Odtud vidíme, že lineární kombinací získám body roviny ABC.



pro $\nu \geq 0$: polorovina ABC



pro $\nu, \mu \geq 0$: úhel CAB



pro $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ (nebo $\nu \in \langle 0, 1\rangle \wedge \mu \in \langle 0, 1-\nu\rangle$): trojúhelník ABC

$\square$

5 Afinní podprostor, jeho jednoznačné zadání, rovnice

Úloha 5.1 *V afinním prostoru A_5 jsou dány body $X = [1, 2, -1, 1, 0]$, $Y = [-3, 1, -1, 1, 2]$, $Z = [0, 2, -1, 3, 2]$, $U = [-1, 1, 0, 3, 4]$, $V = [0, 2, -2, -3, -4]$. Rozhodněte, zda tyto body jednoznačně určují nadrovinu.*

Úloha 5.2 *V afinním prostoru A_4 jsou dány body $B = [4, 3, 5, -6]$, $C = [1, 8, 4, 2]$, $D = [-2, 13, 3, 10]$. Určete, zda jsou tyto body kolineární. Pokud ano, napište parametrické vyjádření přímky, na které leží.*

Úloha 5.3 *Dokažte, že body $B = [1, 2, 2]$, $C = [1, 3, 1]$, $D = [2, 4, 0]$, $E = [3, 5, -1]$ z afinního prostoru A_3 jsou komplanární a napište parametrické vyjádření příslušné roviny.*

Úloha 5.4 *V afinním prostoru A_2 je dána přímka $p = \{B, \vec{u}\}$. Napište její parametrické vyjádření a z parametrického vyjádření odvoďte obecnou rovnici.*

a) $B = [1, 0]$, $\vec{u} = (-1, 4)$
b) $B = [2, 3]$, $\vec{u} = (1, 0)$

Úloha 5.5 *V prostoru A_4 je dána nadrovina A_3. Určete její parametrické vyjádření a obecnou rovnici, je-li*

$$A_3 = \{B = [0, 1, 0, -1], \vec{u} = (1, 0, 2, -1), \vec{v} = (-1, 2, -1, 0), \vec{w} = (0, 1, -3, 0)\}.$$

Úloha 5.6 *V prostoru A_3 jsou dány body $B = [1, 2, -1]$, $C = [2, 1, 0]$, $D = [3, 1, -1]$. Rozhodněte, zda tyto body jednoznačně určují rovinu. Pokud ano, napište její parametrické vyjádření a obecnou rovnici jednak vyloučením parametrů, jednak pomocí determinantu.*

Úloha 5.7 *V prostoru A_4 napište obecnou rovnici nadroviny α, je-li dáno:*

$$\alpha = \{B = [2, 1, 0, 1], \vec{u} = (-1, 1, -2, -1), \vec{v} = (1, 0, 2, 2), \vec{w} = (2, -1, 3, 1)\}.$$

Úloha 5.8 *V afinním prostoru A_4 určete parametrické vyjádření přímky*

$$p = \{B = [1, 0, 1, 3], \vec{u} = (1, 2, 2, 1)\}$$

a najděte na této přímce body $C = [?, ?, -3, ?]$ a $D = [1, ?, ?, ?]$.

Úloha 5.9 *V prostoru A_4 jsou dány body $A = [1, 0, 2, 3]$, $B = [2, 1, 0, 1]$, $C = [1, 3, 2, 1]$, $D = [4, -3, -4, 1]$. Jaký určují podprostor? Napište jeho parametrické vyjádření.*

Úloha 5.10 *Určete parametrické vyjádření roviny $x - 2y + 3z - 5 = 0$ v prostoru A_3.*

Úloha 5.11 *V afinním prostoru A_3 zapište přímku p jako průnik nadrovin.*

$$p: \quad B = [2, 3, 0] \quad C = [1, 5, 2]$$

Úloha 5.12 *V A_3 zapište bod $B = [2, 1, 3]$ jako průnik nadrovin.*

Úloha 5.13 *V afinním prostoru A_4 je dána rovina*

$$\alpha = \{B = [1, 2, 3, 4]; \vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (1, 2, 0, -1)\}.$$

Určete α jako průnik nadrovin.

Úloha 5.14 *Určete přímku $p = \{C = [2, 0, 1, 2]; \vec{u} = (3, 1, 1, 0)\}$ jako průnik nadrovin v A_4*

Řešení.

5.1 Z pěti zadaných bodů vytvořím 4 vektory.

Nadrovina v A_5 je podprostor dimenze $5 - 1 = 4$.

Body X, Y, Z, U, V jednoznačně určují nadrovinu $\iff$ příslušné vektory jsou LN, tedy hodnost matice sestavené z těchto vektorů musí být 4.

$$\begin{aligned}
(Y - X) &= (-4, -1, 0, 0, 2) \\
(Z - X) &= (-1, 0, 0, 2, 2) \\
(U - X) &= (-2, -1, 1, 2, 4) \\
(V - X) &= (-1, 0, -1, -4, -4)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$h = 3 \quad \text{(pouze 3 LN vektory)}$$

$$\Downarrow$$

body X, Y, Z, U, V určují $\underline{\underline{\text{podprostor dimenze 3}}}$.

5.2 Body B, C, D jsou kolineární $\iff$ vektory $(C-B)$, $(D-B)$ jsou LZ

$$\left.\begin{aligned} (C-B) &= (-3,5,-1,8) \\ (D-B) &= (-6,10,-2,16) \end{aligned}\right\} \quad (D-B) = 2\cdot(C-B), \quad \text{jsou LZ} \implies B,\ C,\ D\ \underline{\underline{\text{kolineární}}}$$

Parametrické vyjádření přímky BC:

$$\text{např.} \qquad \underline{\underline{X = [4,3,5,-6] + t\cdot(-3,5-1,8) \quad t\in\mathbb{R}}}$$

5.3 Body B, C, D, E leží v jedné rovině $\iff$ vektory $(C-B)$, $(D-B)$, $(E-B)$ určují VP dimenze nejvýše 2.

$$\begin{aligned} (C-B) &= (0,1,-1) \\ (D-B) &= (1,2,-2) \\ (E-B) &= (2,3,-3) \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -4-3+4+3 = 0$$

$$\implies \text{vektory } (C-B),\ (D-B),\ (E-B) \text{ jsou LZ}$$

Vidíme, že nejsou všechny tři vektory násobky téhož vektoru (pak by B, C, D, E byly dokonce kolineární), tedy určují $\underline{\underline{\text{podprostor dimenze 2}}}$ (rovinu).

Parametrické vyjádření roviny BCD:

$$\text{např.} \qquad \underline{\underline{X = [1,2,2] + t\cdot(0,1,-1) + s\cdot(1,2,-2) \quad t,s\in\mathbb{R}}}$$

5.4 a) Parametrické vyjádření:

$$\underline{\underline{X = [1,0] + t\cdot(-1,4)\, t\in\mathbb{R}}} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 0 + 4t \end{aligned} \quad t\in\mathbb{R}\right)\ 4\cdot(I) + (II)$$

Obecná rovnice:

$$4x + y = 4 \longrightarrow \underline{\underline{4x + y - 4 = 0}}$$

obecnou rovnici získám vyloučením parametru t z parametrického vyjádření

b) Parametrické vyjádření:

$$\underline{\underline{X = [2,3] + t\cdot(1,0)\, t\in\mathbb{R}}} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 \end{aligned} \quad t\in\mathbb{R}$$

Obecná rovnice:

$$\underline{\underline{y - 3 = 0}}$$

5.5 Parametrické vyjádření:

$$\underline{\underline{X = [0,1,0,-1] + t \cdot (1,0,2,-1) + s \cdot (-1,2,-1,0) + r \cdot (0,1,-3,0) \quad t,s,r \in \mathbb{R}}}$$

$$\begin{array}{lllr}
x_1 = & t - s & (I)+(IV): & x_1 + x_4 = -1 - s \longrightarrow s = -1 - x_1 - x_4 \\
x_2 = & 1 + 2s + r & (IV): & t = -1 - x_4 \\
x_3 = & 2t - s - 3r & 3\cdot(II)+(III): & 3x_2 + x_3 = 3 + 2t + 5s \\
x_4 = & -1 - t & & 3x_2 + x_3 = 3 + 2\,(-1 - x_4) + 5\,(-1 - x_1 - x_4)
\end{array}$$

Obecná rovnice:

$$\underline{\underline{5x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 4 = 0}}$$

Parametrické vyjádření má každý podprostor, obecnou rovnici má jen nadrovina.

- Parametrické vyjádření není jednoznačné, záleží na volbě bodu a báze.
- Obecná rovnice je až na nenulový násobek jednoznačná.

5.6 Aby body B, C, D určovaly rovinu, musí být vektory $(C-B)$, $(D-B)$ LN.

$$\left.\begin{array}{l} (C-B) = (1,-1,1) \\ (D-B) = (2,-1,0) \end{array}\right\} \quad \text{jsou LN} \implies B,\ C,\ D\ \underline{\underline{\text{určují rovinu}}}$$

Parametrické vyjádření:

$$X = B + t\,(C-B) + s\,(D-B) \quad t,s \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\boxed{\begin{array}{ll} x = 1 + t + 2s & \\ y = 2 - t - s & t,s \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t & \end{array}}}$$

Obecná rovnice (vyloučením parametrů):

$$\begin{array}{rl}
(III): & t = z + 1 \\
(I) + 2\cdot(II): & x + 2y = 5 - t \longrightarrow x + 2y = 5 - z - 1 \longrightarrow \underline{\underline{x + 2y + z - 4 = 0}}
\end{array}$$

Obecná rovnice (pomocí determinantu):

$$(X-B) = (x-1, y-2, z+1)$$

$$(X-B) = t \cdot (C-B) + s \cdot (D-B) \quad t,s \in \mathbb{R}$$

Vektory $(X-B)$, $(C-B)$, $(D-B)$ jsou LZ $\implies$ determinant sestavený z těchto vektorů musí být roven nule.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\,(z+1) + 2\,(y-2) + 2\,(z+1) + (x-1) = 0$$

$$\underline{\underline{x + 2y + z - 4 = 0}}$$

5.7 neřešená úloha

5.8 neřešená úloha

5.9 neřešená úloha

5.10

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

Máme 1 rovnici o 3 neznámých – dvě zvolím jako parametry a třetí dopočítám.

$$\begin{aligned} y &= t \\ z &= s \end{aligned} \qquad x - 2t + 3s - 5 = 0 \longrightarrow x = 5 + 2t - 3s$$

Parametrické vyjádření:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5 + 2t - 3s \\ y &= t \qquad\qquad t, s \in \mathbb{R} \\ z &= s \end{aligned}}$$

5.11

$$(C - B) = (-1, 2, 2) \qquad p: \begin{aligned} x &= 2 - t \longrightarrow t = 2 - x \\ y &= 3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= 0 + 2t \end{aligned}$$

Potřebuji $3 - 1 = 2$ nadroviny.

$$\begin{aligned} y &= 3 + 2(x - 2) \longrightarrow \\ z &= 2(x - 2) \longrightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} \alpha &: 2x + y - 7 = 0 \\ \beta &: 2x + z - 4 = 0 \end{aligned}}$$

Roviny α, β určují celý svazek nadrovin o ose p ($\alpha \cap \beta = p$). Každé dvě roviny tohoto svazku určují přímku p.

Každou rovinu tohoto svazku dostanu jako lineární kombinaci α a β.

$$\rho : k\,(2x + y - 7) + l\,(2x + z - 4) = 0, \quad \text{kde } (k, l) \neq (0, 0)$$

$$\text{např.} \quad \rho : 4x + y + z - 11 = 0$$

5.12 Obecná rovnice nadroviny ρ v A_3:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad B \in \rho \implies 2a + b + 3c + d = 0$$

Potřebuji $3 - 0 = 3$ nadroviny.

Volme například:

1. $a = 0,\ b = 1,\ c = 1 \implies 1 + 3 + d = 0 \longrightarrow d = -4$: $\underline{\underline{\alpha : y + z - 4 = 0}}$
2. $a = 1,\ b = 0,\ c = 0 \implies d = -2$: $\underline{\underline{\beta : x - 2 = 0}}$
3. $a = 0,\ b = 0,\ c = 1 \implies d = -3$: $\underline{\underline{\gamma : z - 3 = 0}}$

Roviny α, β, γ určují <u>trs nadrovin</u> procházejících bodem B

5.13 Rovina α má dimenzi 2 $\implies$ potřebuji $4 - 2 = 2$ nadroviny.

Parametrické vyjádření:

$$
p:\quad
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + t + s \\
x_2 &= 2 \phantom{{}+t} + 2s \\
x_3 &= 3 + t \xrightarrow{\ t,s\in\mathbb{R}\ } t = x_3 - 3 \\
x_4 &= 4 \phantom{{}+t} - s \longrightarrow s = 4 - x_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1A_3 :&\quad x_1 = 1 + x_3 - 3 + 4 - x_4 \longrightarrow \underline{\underline{x_1 - x_3 + x_4 - 2 = 0}} \\
{}^2A_3 :&\quad x_2 = 2 + 2\,(4 - x_4) \longrightarrow \underline{\underline{x_2 + 2x_4 - 10 = 0}}
\end{aligned}
$$

5.14 Přímka p má dimenzi 1 $\implies$ potřebuji $4 - 1 = 3$ nadroviny.

Parametrické vyjádření:

$$
p:\quad
\begin{aligned}
x_1 &= 2 + 3t \\
x_2 &= + t \xrightarrow[\ t\in\mathbb{R}\ ]{} t = x_2 \\
x_3 &= 1 + t \\
x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1A_3 :&\quad \underline{\underline{x_4 = 2}} \\
{}^2A_3 :&\quad x_1 = 2 + 3x_2 \longrightarrow \underline{\underline{x_1 - 3x_2 - 2 = 0}} \\
{}^3A_3 :&\quad x_3 = 1 + x_2 \longrightarrow \underline{\underline{x_2 - x_3 + 1 = 0}}
\end{aligned}
$$

$\square$

6 Vzájemné polohy podprostorů

Úloha 6.1 *V afinním prostoru A_n určete vzájemnou polohu přímek p a q, je-li*

$$\begin{array}{lll}
a)\ n=3, & p=\{P=[1,2,3]\,;\vec{u}=(2,-2,4)\}, \\
 & q=\{Q=[0,3,1]\,;\vec{v}=(-3,3,-6)\}, \\
b)\ n=3, & p=\{P=[0,0,-1]\,;\vec{u}=(1,1,3)\}, \\
 & q=\{Q=[0,-1,2]\,;\vec{v}=(2,3,3)\}, \\
c)\ n=3, & p=\{P=[1,3,-1]\,;\vec{u}=(2,-4,3)\}, \\
 & q=\left\{Q=[0,-3,1]\,;\vec{v}=\left(-1,2,-\frac{3}{2}\right)\right\}, \\
d)\ n=3, & p=\{P=[1,2,-1]\,;\vec{u}=(0,1,3)\}, \\
 & q=\{Q=[0,0,2]\,;\vec{v}=(1,-3,1)\}, \\
e)\ n=4, & p=\{P=[1,0,1,1]\,;\vec{u}=(1,2,1,2)\}, \\
 & q=\{Q=[-1,2,0,1]\,;\vec{v}=(0,3,1,1)\},
\end{array}$$

v případě různoběžných přímek určete také jejich průsečík.

Úloha 6.2 *V afinním prostoru A_n určete vzájemnou polohu přímek p a q, je-li*

$$\begin{array}{ll}
n=4, & p=\{P=[3,2,1,0]\,;\vec{u}=(0,a,1,b)\,;a,b\in\mathbb{R}\}\,, \\
 & q=\{Q=[-2,4,4,-1]\,,\vec{v}=(5,-5,-6,4)\}\,,
\end{array}$$

v případě různoběžných přímek určete také jejich průsečík.

Úloha 6.3 *V afinním prostoru A_n určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ, je-li*

$$\begin{array}{ll}
a)\ n=3, & p=\{P=[1,4,-3]\,;\vec{u}=(-1,3,-4)\}, \\
 & \rho=\{R=[3,3,0]\,;\vec{v}=(1,2,-1)\,,\vec{w}=(3,1,2)\}, \\
b)\ n=3, & p=\{P=[-2,1,0]\,;\vec{u}=(-2,1,-2)\}, \\
 & \rho=\{R=[1,2,2]\,;\vec{v}=(1,0,0)\,,\vec{w}=(1,3,-2)\}, \\
c)\ n=4, & p=\{P=[0,1,-3,1]\,;\vec{u}=(3,2,0,1)\}, \\
 & \rho=\{R=[2,1,1,3]\,;\vec{v}=(2,3,1,4)\,,\vec{w}=(3,1,0,4)\}, \\
d)\ n=4, & p=\{P=[0,1,0,-1]\,;\vec{u}=(1,1,-1,1)\}, \\
 & \rho=\{R=[1,3,-3,3]\,;\vec{v}=(4,1,1,1)\,,\vec{w}=(0,1,-2,3)\},
\end{array}$$

v případě různoběžné přímky a roviny určete jejich průsečík.

Řešení.

6.1 a)

$$\vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{v}\implies\vec{u},\,\vec{v}\text{ jsou LZ}$$

Jsou totožné, nebo rovnoběžné různé?

$$(P-Q)=(1,-1,2)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P-Q)$ a $\vec{u}$ LZ.

$$2\cdot(P-Q)=\vec{u}\qquad 2\cdot(1,-1,2)=(2,-2,4)\implies\text{jsou LZ}\implies\underline{\underline{p\parallel q\wedge p=q}}$$

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou LN $\implies$ p, q mohou být různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P-Q)=(0,1,-3)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P-Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ} \implies \underline{\underline{p \between q}}$$

Průsečík:

$$\begin{aligned} \underbrace{P - a\cdot\vec{u}}_{X\in p} &= \underbrace{Q + b\cdot\vec{v}}_{X\in q} \\ P - Q &= a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} \\ (0,1,-3) &= a\,(1,1,3) + b\,(2,3,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2b \\ 1 &= a + 3b \\ -3 &= 3a + 3b \end{aligned} \quad \Big)\ (II)-(I) \implies \underline{\underline{b=1}}$$

$$-3 = 3a + 3 \longrightarrow -6 = 3a \longrightarrow \underline{\underline{a=-2}}$$

$$\underline{\underline{X = P - a\cdot\vec{u} = Q + b\cdot\vec{v} = [2,2,5]}}$$

c) $\vec{u} = -2\cdot\vec{v} \implies \vec{u}$, $\vec{v}$ jsou LZ $\implies p$, q jsou totožné nebo rovnoběžné různé.

$$\left.\begin{aligned} (P-Q) &= (1,6,-2) \\ \vec{u} &= (2,-4,3) \end{aligned}\right\} \text{LN} \implies \underline{\underline{p \parallel q \wedge p \neq q}}$$

d) $\vec{u}$, $\vec{v}$ LN $\implies p$, q jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P-Q) = (1,2,-3)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P-Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \underline{\underline{p,\ q \text{ jsou mimoběžné}}}$$

e) $\vec{u}$, $\vec{v}$ LN $\implies p$, q jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P-Q) = (2,-2,1,0)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P-Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \underline{\underline{p,\ q \text{ jsou mimoběžné}}}$$

6.2

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} &= (0, a, 1, b) \\ \vec{v} &= (5, -5, -6, 4) \end{aligned}\right\} \quad \text{jsou LN} \implies \text{různoběžné nebo mimoběžné}$$

$$(P - Q) = (5, -2, -3, 1)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P - Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ LZ.

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & b+a \end{pmatrix}$$

α) pro $\quad a = 1 \quad \wedge \quad b = -1$:

Hodnost matice je 2 $\implies$ $(P - Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou LZ $\implies$ p, q jsou $\underline{\underline{\text{různoběžné}}}$

Průsečík:

$$\vec{u} = (0, 1, 1, -1)$$

$$P + t \cdot \vec{u} = Q + s \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned} (P - Q) &= s \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{u} \\ (5, -2, -3, 1) &= s\,(5, -5, -6, 4) - t\,(0, 1, 1, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 5s \longrightarrow \underline{\underline{s = 1}} \\ -2 &= -5s - t \\ -3 &= -6s - t \\ 1 &= 4s + t \\ 1 &= 4 + t \longrightarrow \underline{\underline{t = -3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies X &= P + t \cdot \vec{u} = [3, 2, 1, 0] + 1 \cdot (0, 1, 1, -1) \\ X &= Q + s \cdot \vec{v} = [-2, 4, 4, -1] - 3 \cdot (5, -5, -6, 4) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{X = [3, -1, -2, 3]}}$$

β) pro $\quad a \neq 1 \quad \vee \quad b \neq -1$:

Hodnost matice je 3 $\implies$ $(P - Q)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou LN $\implies$ p, q jsou $\underline{\underline{\text{mimoběžné}}}$

6.3 a) Vyšetříme, zda jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ}$$

$$\implies (p \subset \rho) \vee (p \parallel \rho \wedge p \cap \rho = \emptyset)$$

$$(P - R) = (-2, 1, -3)$$

Vyšetříme, zda jsou vektory $(P-R)$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ} \implies \underline{\underline{p \subset \rho}}$$

b) Vyšetříme, zda jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6+2 = -4 \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \underline{\underline{\text{různoběžné}}} \text{ (v } A_3 \text{ nemohou být mimoběžné)}$$

Průsečík:

$$P - a\cdot\vec{u} = R + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w}$$

$$\begin{aligned} (P-R) &= a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w} \\ (-3,-1,-2) &= a\,(-2,1,-2) + b\,(1,0,0) + c\,(1,3,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 &= -2a + b + c \\ -1 &= a + 3c \quad / \cdot 2 \\ -2 &= -2a - 2c \end{aligned}$$

$$\Big) + \implies -4 = 4c \implies \underline{\underline{c=-1}}$$

$$-1 = a - 3 \longrightarrow \underline{\underline{a=2}} \qquad \underline{\underline{b=2}}$$

$$\begin{aligned} \implies X &= P - a\cdot\vec{u} = [-2,1,0] - 2\cdot(-2,1,-2) \\ X &= R + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w} = [1,2,2] + 2\cdot(1,0,0) - 1\cdot(1,3,-2) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{X = [2,-1,4]}}$$

c) Vyšetříme, zda jsou $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \text{různoběžné nebo mimoběžné}$$

$$(P-R) = (-2,0,-4,-2)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P-R)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \underline{\underline{\text{mimoběžné}}}$$

d) Vyšetříme, zda jsou $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$$\implies \text{různoběžné nebo mimoběžné}$$

$$(P - R) = (-1, -2, 3, -4)$$

Vyšetříme, zda jsou $(P - R)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \implies \text{jsou LZ}$$

$$\implies \underline{\underline{\text{různoběžné}}}$$

Průsečík:

$$P - a \cdot \vec{u} = R + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$\begin{aligned} (P - R) &= a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} \\ (-1, -2, 3, -4) &= a\,(1, 1, -1, 1) + b\,(4, 1, 1, 1) + c\,(0, 1, -2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &= a + 4b \\ -2 &= a + b + c \\ 3 &= -a + b - 2c \\ -4 &= a + b + 3c \end{aligned} \qquad (II) - (IV) \implies 2 = -2c \longrightarrow \underline{\underline{c = -1}}$$

$$1 = -a + b, \quad \text{sečteme s } (I) \longrightarrow 0 = 5b \longrightarrow \underline{\underline{b = 0}} \qquad \underline{\underline{a = -1}}$$

$$\implies X = P - a \cdot \vec{u} = [0, 1, 0, -1] + (1, 1, -1, 1)$$

$$\underline{\underline{X = [1, 2, -1, 0]}}$$

$\square$

7 Příčky mimoběžných podprostorů

Úloha 7.1 *V A_3 sestrojte příčku přímek p, q daným směrem $\vec{w}$, je-li*

a) $p = \{B = [-1, 1, -5]\,; \vec{u} = (1, 1, 2)\}$,
$q = \{C = [1, -2, 3]\,; \vec{v} = (1, 3, -1)\}$,
$\vec{w} = (1, -2, 3)$,
b) $p = \{B = [1, 2, -1]\,; \vec{u} = (1, -1, 1)\}$,
$q = \{C = [0, 9, -2]\,; \vec{v} = (1, 0, 0)\}$,
$\vec{w} = (1, 2, 0)$,
c) $p = \{B = [1, 0, 1]\,; \vec{u} = (2, 1, 0)\}$,
$q = \{C = [2, 2, 3]\,; \vec{v} = (3, 0, 2)\}$,
$\vec{w} = (2, 1, 4)$.

Úloha 7.2 *V A_3 sestrojte příčku přímek p, q procházející daným bodem M, je-li*

a) $p = \{B = [2, 1, 1]\,; \vec{u} = (1, 0, 1)\}$,
$q = \{C = [-1, 1, 0]\,; \vec{v} = (1, 1, 0)\}$,
$M = [2, 2, 1]$,
b) $p = \{B = [2, 0, 1]\,; \vec{u} = (1, 2, 3)\}$,
$q = \{C = [2, 2, 0]\,; \vec{v} = (1, 1, 1)\}$,
$M = [2, 1, 3]$,
c) $p = \{B = [3, 3, 3]\,; \vec{u} = (2, 2, 1)\}$,
$q = \{C = [0, 5, -1]\,; \vec{v} = (1, 1, 1)\}$,
$M = [4, 5, 3]$.

Úloha 7.3 *V A_4 určete příčku mimoběžných podprostorů, kterými jsou přímka p a rovina ρ, procházející daným bodem M, je-li*

$$p = \{B = [0, 0, -6, -7]\,; \vec{u} = (1, 1, 2, 1)\}\,,$$
$$\rho = \{C = [2, 1, 1, 1]\,; \vec{v} = (1, 2, -1, 1)\,, \vec{w} = (-1, 2, 1, 2)\}\,,$$
$$M = [7, -2, -1, 0]\,.$$

Řešení.

7.1 a) Ověříme, že se jedná o mimoběžky.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 24 - 8 - 12 - 3 = -7 \neq 0 \implies (C - B)\,, \vec{u}, \vec{v} \text{ jsou LN}$$

$$\implies p,\ q \text{ jsou mimoběžné}$$

Ověříme podmínku existence průsečnice dvou rovin ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 - 4 - 6 - 2 - 3 = -7 \neq 0 \implies \text{příčka existuje}$$

$$\rho = \{B = [-1, 1, -5]\,; \vec{u} = (1, 1, 2)\,, \vec{w} = (1, -2, 3)\}$$
$$\sigma = \{C = [1, -2, 3]\,; \vec{v} = (1, 3, -1)\,, \vec{w} = (1, -2, 3)\}$$

Příklad budeme řešit přes obecné rovnice rovin ρ, σ — využijeme determinanty.

$$\rho: \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z+5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3x+3-2z-10+2y-2-z-5+4x+4-3y+3$$
$$= \underline{\underline{7x-y-3z-7=0}}$$

$$\sigma: \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 3 & -2 \\ z-3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9x-9-2z+6-y-2-3z+9-3y-6-2x+2$$
$$= \underline{\underline{7x-4y-5z=0}}$$

Příčkou je průsečnice těchto dvou rovin.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -5 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} z &= t \\ y &= \frac{7-2t}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t \\ x &= \frac{1}{7}\left(5t + 4 \cdot \frac{7-2t}{3}\right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{15t+28-8t}{3} = \frac{1}{3}(t+4) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \text{ příčka: } \underline{\underline{r = \left\{ \left[\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0\right]; \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) \right\}}}$$

b) Přímkou p proložíme rovinu $\rho\,(p, \vec{w}) = \{B = [1,2,-1]\,; \vec{u} = (1,-1,1)\,, \vec{w} = (1,2,0)\}$. Průsečík $q \cap \rho$ hledáme pomocí parametrických rovnic.

$$q: \quad \begin{aligned} x &= t \\ y &= 9 \\ z &= -2 \end{aligned} \qquad \rho: \quad \begin{aligned} x &= 1+r+s \\ y &= 2-r+2s \\ z &= -1+r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1+r+s \\ 9 &= 2-r+2s \\ -2 &= -1+r \longrightarrow \underline{\underline{r=-1}} \\ 9 &= 2+1+2s \longrightarrow \underline{\underline{s=3}} \\ t &= 1-1+3 \longrightarrow \underline{\underline{t=3}} \end{aligned}$$

Dosazením t do rovnice přímky q (nebo r, s do rovnice roviny ρ) dostáváme průsečík $\underline{\underline{X = [3,9,-2]}}$.

$$\text{příčka:} \qquad \underline{\underline{r = \{X = [3,9,-2]\,; \vec{w} = (1,2,0)\}}}$$

c)

$$(B-C)+k\cdot\vec{u}-l\cdot\vec{v}=m\cdot\vec{w}$$

$$\begin{aligned}
-1+2k-3l&=2m\\
-2+\;\;k\qquad\;&=\;\;m\\
-2\qquad\;-2l&=4m
\end{aligned}$$

$2\cdot(I)-4\cdot(II)-3\cdot(III)\implies 12=-12m$ $\qquad\underline{\underline{m=-1}}$

Dosaď do (II) $\qquad\underline{\underline{k=1}}$

Dosaď do (III) $\qquad\underline{\underline{l=1}}$

$$\begin{aligned}
P&=B+k\cdot\vec{u}=[3,1,1]\\
Q&=C+l\cdot\vec{v}=[5,2,5]
\end{aligned}$$

příčka: $\qquad\underline{\underline{\leftrightarrow PQ:\quad r=\{P=[3,1,1]\,;\vec{w}=(2,1,4)\}}}$

7.2 a) 1. způsob řešení:

$$\rho=\{p,M\}=\{M;\vec{u},(M-B)\}=\{[2,2,1]\,;(1,0,1)\,,(0,1,0)\}$$

$$q:\quad\begin{aligned}x&=-1+t\\ y&=\;\;\,1+t\\ z&=\;\;\,0\end{aligned}\qquad\qquad \rho:\quad\begin{aligned}x&=2+r\\ y&=2\qquad+s\\ z&=1+r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-1+t&=2+r\\
1+t&=2\qquad+s\\
0\quad&=1+r\longrightarrow \underline{\underline{r=-1}}\\
-1+t&=2-1\longrightarrow \underline{\underline{t=2}}\qquad\qquad \underline{\underline{s=1}}
\end{aligned}$$

$$Q=C+t\cdot\vec{v}=[-1,1,0]+2\,(1,1,0)=[1,3,0]$$

příčka: $\qquad\underline{\underline{r=\{M=[2,2,1]\,;(M-Q)=(1,-1,1)\}}}$

2. způsob řešení:

$$\begin{aligned} P &= B + t \cdot \vec{u} \\ Q &= C + s \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P - M &= k \cdot (Q - M) \\ (B - M + t \cdot \vec{u}) &= k \cdot (C - M + s \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 2 + t &= k\,(-1 - 2 + s\,) \\ 1 - 2 \qquad &= k\,(\quad 1 - 2 + s\,) \\ 1 - 1 + t &= k\,(\qquad -1 \qquad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \ k\,(s - 3\,) \\ -1 &= \ k\,(s - 1\,) \\ t &= -k \longrightarrow \underline{\underline{t = -1}} \end{aligned}$$

$$-\,k = k\,(s - 3) \longrightarrow -\,1 = s - 3 \longrightarrow \underline{\underline{s = 2}}$$

$$-\,1 = k\,(2 - 1) \longrightarrow \underline{\underline{k = -1}}$$

$$\begin{aligned} P &= B + t \cdot \vec{u} = [2, 1, 1] + (1, 0, 1) = [3, 1, 2] \\ Q &= C + s \cdot \vec{v} = [-1, 1, 0] + 2\,(1, 1, 0) = [1, 3, 0] \end{aligned}$$

příčka: $\underline{\underline{\leftrightarrow PQ\colon \quad r = \{P = [3, 1, 2]\,;(Q - P) = (-2, 2, -2)\}}}$

b)

$$(M - B) = (0, 1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \vec{u},\ \vec{v},\ (M - B) \text{ jsou LZ}$$

$$\implies \underline{\underline{\text{neexistuje příčka}}}$$

c)

$$(M - B) = (1, 2, 0) \qquad (M - C) = (4, 0, 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \vec{u},\ \vec{v},\ (M - B) \text{ jsou LN} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{u},\ \vec{v},\ (M - C) \text{ jsou LN} \end{array}\right\} \implies \text{příčka existuje}$$

$$\rho = \{p, M\} = \{B; \vec{u}, (M - B)\} = \{[3, 3, 3]\,; (2, 2, 1)\,, (1, 2, 0)\}$$

$$q: \quad \begin{aligned} x &= \quad\ + k \\ y &= \ \ 5 + k \\ z &= -1 + k \end{aligned} \qquad\qquad \rho: \quad \begin{aligned} x &= 3 + 2t + 2s \\ y &= 3 + 2t + \ \ s \\ z &= 3 + \ \ t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3+2t+\ s &= k \\ 3+2t+2s &= 5+k \\ 3+\ t &= -1+k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3+2t+2s &= 5+3+2t+s \longrightarrow \underline{\underline{s=5}} \\ 3+\ t &= -1+3+2t+s \longrightarrow t = 1-s \longrightarrow \underline{\underline{t=-4}} \end{aligned}$$

$$Q = B + t\cdot\vec{u} + s\cdot(M-B) = [3,3,3] + 5\,(2,2,1) - 4\,(1,2,0) = [0,5,-1]$$

$$\text{příčka:} \quad \underline{\underline{r = \{Q = [0,5,-1]\,;(Q-M) = (-4,0,-4)\}}}$$

7.3 Ověříme podmínku existence příčky (r).

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 12 & 21 \end{pmatrix} \implies (M-B),\ \vec{v},\ \vec{w} \text{ jsou LN}$$

$$\implies \text{příčka existuje}$$

Označme P, Q následovně:

$$P = p \cap r \qquad\qquad P = B + t\cdot\vec{u}$$

$$Q = \rho \cap r \qquad\qquad Q = C + r\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w}$$

Musí platit následující rovnost:

$$\begin{aligned} M - Q &= \lambda\cdot(M-P) \\ M - C - r\cdot\vec{v} - s\cdot\vec{w} &= \lambda\,(M - B - t\cdot\vec{u}) \\ \lambda\cdot(M-B) + r\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w} - \lambda t\cdot\vec{u} &= M - C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r & s & \lambda & \lambda t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -16 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{s=-2}} \longrightarrow 4s - 3\lambda t = -9 \qquad 4\lambda - \lambda t = 1 \qquad r - s + 7t - \lambda t = 5$$

$$4\cdot(-2) - 3\lambda t = -9 \qquad 4\lambda - \frac{1}{3} = 1 \qquad r + 2 + \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 5$$

$$-3\lambda t = -1 \qquad \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{3}}} \qquad \underline{\underline{r=1}}$$

$$\lambda t = \frac{1}{3} \longrightarrow \underline{\underline{t=1}}$$

$$\begin{aligned} P &= B + t\cdot\vec{u} = [0,0,-6,-7] + (1,1,2,1) = [1,1,-4,-6] \\ Q &= C + r\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w} = [2,1,1,1] + (1,2,-1,1) - 2\,(-1,2,1,2) = [5,-1,-2,-2] \end{aligned}$$

$$\text{příčka:} \quad \underline{\underline{\leftrightarrow PQ\!: \quad r = \{P = [1,1,-4,-6]\,;(Q-P) = (4,-2,2,4)\}}}$$

$\square$

8 Vzdálenosti

Úloha 8.1 *V prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [1, 3, -5]$ od roviny $\rho : x - 2y + 2z - 3 = 0$.*

Úloha 8.2 *V prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [3, 2, 1]$ od přímky $p = \{P = [2, 1, 1]\,; \vec{u} = (1, -1, 1)\}$.*

Úloha 8.3 *V prostoru E_3 určete vzdálenost přímek p a q, je-li*

$$\begin{aligned} p &= \{A = [1, 3, 1]\,; \vec{u} = (2, 1, -2)\}\,, \\ q :& \quad x - 2y - 1 = 0 \wedge 3x - 4y + z - 7 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 8.4 *V prostoru E_3 určete vzdálenost přímky p a roviny σ, je-li*

$$\begin{aligned} p &= \{A = [-6, 4, -3]\,; \vec{u} = (2, 3, -2)\}\,, \\ \sigma :& \quad 9x - 2y + 6z - 41 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 8.5 *V prostoru E_3 určete vzdálenost rovin ρ a σ, je-li*

$$\begin{aligned} \rho :& \quad x + y + \sqrt{2}z - 1 = 0, \\ \sigma &= \left\{S = [-2, -1, 0]\,; \vec{u} = (1, -1, 0)\,, \vec{v} = \left(1, 1, -\sqrt{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Úloha 8.6 *V prostoru E_3 určete vzdálenost přímek p a q, je-li*

$$\begin{aligned} p &= \{B = [4, 2, 3]\,; \vec{u} = (-2, 3, 2)\}\,, \\ q &= \{C = [3, 4, -4]\,; \vec{v} = (2, 0, -1)\}\,. \end{aligned}$$

Úloha 8.7 *V prostoru E_4 určete vzdálenost přímky p a roviny ρ, je-li*

$$\begin{aligned} p &= \{B = [1, -1, -4, 1]\,; \vec{u} = (1, 3, 5, 1)\}\,, \\ \rho &= \{C = [3, -8, 4, -2]\,; \vec{v} = (1, 3, 0, 0)\,, \vec{w} = (1, 6, -2, -1)\}\,. \end{aligned}$$

Úloha 8.8 *V prostoru E_3 určete vzdálenost přímky p a roviny ρ, je-li*

$$\begin{aligned} p &= \{B = [2, 13, 7]\,; \vec{u} = (-3, -1, 4)\}\,, \\ \rho :& \quad 2x + 6y + 3z - 5 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 8.9 *V prostoru E_4 určete vzdálenost přímky p a roviny ρ, je-li*

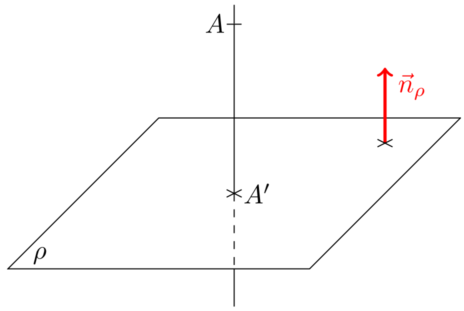
$$\begin{aligned} p &= \{P = [0, 3, -2, -5]\,; \vec{u} = (-2, 0, -1, 2)\}\,, \\ \rho &= \{R = [-2, -4, 0, 4]\,; \vec{v} = (-1, -1, -2, 2)\,, \vec{w} = (1, 2, 1, 0)\}\,. \end{aligned}$$

Řešení.

8.1 a) Využijeme vzorec pro vzdálenost bodu od nadroviny:

$$|A\rho| = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 6 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{3} = \underline{\underline{6}}$$

b) Využijeme kolmého průmětu bodu A do roviny ρ:



$$\vec{n}_\rho = (1,-2,2)$$

$$k: \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 - 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= -5 + 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \cap \rho: \quad (1+t) - 2\,(3-2t) + 2\,(-5+2t) - 3 &= 0 \\ 1 + t - 6 + 4t - 10 + 4t - 3 &= 0 \\ 9t &= 18 \\ \underline{\underline{A' = [3,-1,-1]}} \longleftarrow \quad \underline{\underline{t = 2}} \end{aligned}$$

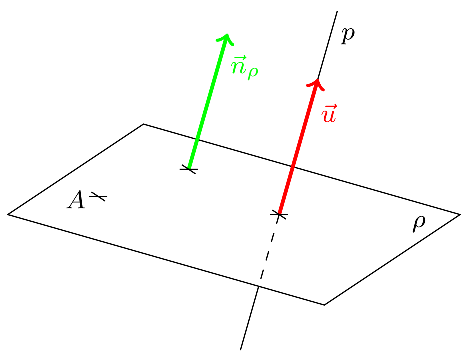
$$\begin{aligned} (A' - A) &= (2,-4,4) \\ \|A' - A\| &= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

c) Vyžijeme Gramovy determinanty:

$$\begin{aligned} B &= [1,3,4] \\ \vec{u} &= (0,1,1) \\ \vec{v} &= (2,1,0) \\ (B-A) &= (0,0,9) \end{aligned}$$

$$d\,(A,\rho) = \sqrt{\frac{G\,(\vec{u},\vec{v},B-A)}{G\,(\vec{u},\vec{v})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 81 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{9}} = \underline{\underline{6}}$$

8.2 a) Rovina kolmá k p vedená bodem A:



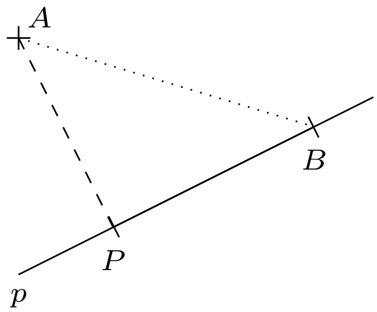
$$p: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \perp p: \quad & \vec{s}_p = \vec{u} = \vec{n}_\rho \\ & \implies \rho: \quad x - y + z + d = 0 \\ A \in \rho: \quad & 3 - 2 + 1 + d = 0 \\ & d = -2 \\ & \implies \rho: \quad x - y + z - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \cap \rho: \quad (2+t) - (1-t) + (1+t) - 2 &= 0 \\ 2 + t - 1 + t + 1 + t - 2 &= 0 \\ 3t &= 0 \\ t = 0 \implies A' &= [2,1,1] \end{aligned}$$

$$\big(A' - A\big) = (-1,-1,0)$$
$$|Ap| = \big|\big|A' - A\big|\big| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

b) Vyjádření paty P kolmice spuštěné z bodu A na přímku p:



$$\begin{aligned} P &\in E_k^{\perp} \\ P &= [2+t, 1-t, 1-t] \\ A &= [3,2,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A-P) &\in V_k^{\perp} \\ (A-P) &= (1-t, 1+t, -t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A-P)\cdot\vec{u} &= 0 \\ (1-t, 1+t, -t)\cdot(1,-1,1) &= 0 \\ 1-t-1-t-t &= 0 \\ -3t &= 0 \\ t &= 0 \implies P = [2,1,1] \end{aligned}$$

$$(A-P) = (1,1,0)$$
$$|Ap| = ||A-P|| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

c) Gramův determinant:

$$\vec{u} = (1,-1,1)$$
$$(B-A) = (-1,-1,0)$$

$$d\,(A,p) = \sqrt{\frac{G\,(\vec{u}, B-A)}{G\,(\vec{u})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot(B-A) \\ (B-A)\cdot\vec{u} & (B-A)\cdot(B-A) \end{vmatrix}}{\big|\vec{u}\cdot\vec{u}\big|}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{3}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

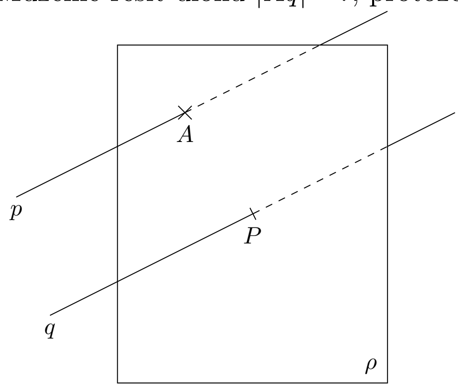
8.3 Hledáme parametrické vyjádření přímky q.

$$\underline{\underline{y = t}} \qquad \begin{aligned} x - 2y - 1 &= 0 \\ x - 2t - 1 &= 0 \\ \underline{\underline{x = 2t+1}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 4y + z - 7 &= 0 \\ 6t + 3 - 4t + z - 7 &= 0 \\ \underline{\underline{z = -2t+4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= t \quad t \in \mathbb{R} \longrightarrow \vec{s}_q = (2,1,-2) \\ z &= 4 - 2t \end{aligned}$$

$$\vec{u} = \vec{s}_q \implies \text{jsou LZ} \wedge A \notin q \implies \underline{\underline{p \parallel q \wedge p \neq q}}$$

a) Můžeme řešit úlohu $|Aq| =?$, protože $|Aq| = |pq|$.



Podprostor totálně kolmý: $\rho: \quad A \in \rho \wedge \rho \perp q$

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho = \vec{s}_q: & \qquad \rho: \quad 2x + y - 2z + d = 0 \\ A \in \rho: & \qquad 2 + 3 - 2 + d = 0 \\ & \qquad d = -3 \\ & \implies \rho: \quad 2x + y - 2z - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \cap q: \quad 2(1+2t) + t - 2(4-2t) - 3 &= 0 \\ 9t &= 9 \\ t &= 1 \implies P = [3, 1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P - A) &= (2, -2, 1) \\ |pq| = |Aq| = ||P - A|| &= \sqrt{4 + 4 + 1} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (A - P) \cdot \vec{s}_q &= 0 \\ (-2t, 2 - t, 2t - 3) \cdot (2, 1, -2) &= 0 \\ -4t + 3 - t - 4t + 6 &= 0 \\ t &= 1 \implies P = [3, 1, 2] \end{aligned}$$

$$|pq| = ||A - P|| = \underline{\underline{3}}$$

c)

$$\begin{aligned} (Q - A) &= (0, -3, 3) \\ \vec{u} &= (2, 1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A, p) &= \sqrt{\frac{G(Q - A, \vec{u})}{G(\vec{u})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} (Q-A)\cdot(Q-A) & \cdot (Q-A)\,\vec{u} \\ \vec{u}\,(Q-A) & \vec{u}\cdot\vec{u} \end{vmatrix}}{|\vec{u}\cdot\vec{u}|}} \\ &= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}}{9}} = \sqrt{\frac{9^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{9}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

8.4

$$\vec{u} \in V_\sigma \wedge A \notin \sigma \implies p \parallel \sigma \implies |p\sigma| = |A\sigma|$$

$$|A\sigma| = \frac{|9 \cdot (-6) - 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) - 41|}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|-54 - 8 - 18 - 41|}{\sqrt{81 + 4 + 36}} = \frac{121}{\sqrt{121}} = \underline{\underline{11}}$$

8.5

$$\vec{u}\cdot\vec{n}_\rho = (1,-1,0)\cdot\left(1,1,\sqrt{2}\right) = 1-1 = 0$$
$$\vec{v}\cdot\vec{n}_\rho = \left(1,1,\sqrt{2}\right)\cdot\left(1,1,-\sqrt{2}\right) = 1+1-2 = 0$$

$$\implies \vec{u},\vec{v}\in V_\rho \wedge S\notin\rho \implies \rho\parallel\sigma$$

$$|\sigma\rho| = |S\rho| = \frac{|-2-1-1|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \underline{\underline{2}}$$

8.6 a) Nejkratší příčka:

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = (-3,2,-6)$$

$$\begin{aligned} P &= B + t\cdot\vec{u} \\ Q &= C + s\cdot\vec{v} \\ P - Q &= k\cdot\vec{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4-2t-3-2s &= -3k \\ 2+3t-4 \quad\quad &= \ \ 2k \\ 3+2t+4+\ \ s &= -6k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \ \ 2t+2s-3k \\ -2 &= -3t \quad\quad +2k \\ 7 &= -2t-\ \ s-6k \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (I)+2\cdot(III):\quad 15 &= -2t-15k \quad /\cdot 3 \\ -2 &= -3t+\ \ 2k \quad /\cdot(-2) \end{aligned}\right\} +$$

$$51 = -51k$$

$$\underline{\underline{\underline{s=-1}}} \longleftarrow \underline{\underline{\underline{t=0}}} \longleftarrow \underline{\underline{\underline{k=-1}}}$$

$$\begin{aligned} P &= B + 0\cdot\vec{u} = [4,2,3] \\ Q &= C - 1\cdot\vec{v} = [1,4,-3] \end{aligned}$$

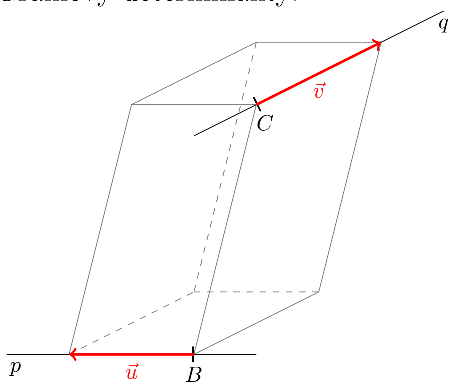
$$\begin{aligned} (P-Q) &= (3,-2,6) \\ |pq| = ||P-Q|| &= \sqrt{9+4+36} = \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

b) „Transferová věta“:
Vektor ze zaměření přímky p přesuneme do zaměření přímky q a úlohu převedeme na vzdálenost bodu B od roviny $\alpha = \{C;\vec{u},\vec{v}\}$.

$$\begin{aligned} \alpha:&\quad -3x+2y-6z+d = 0 \\ C\in\alpha:&\quad -9+8+24+d = 0 \\ &\quad d = -23 \\ \implies \alpha:&\quad -3x+2y-6z-23 = 0 \end{aligned}$$

$$d\,(B,\alpha) = \frac{|-3\cdot 4+2\cdot 2-6\cdot 3-23|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-6)^2}} = \frac{|-49|}{\sqrt{49}} = \underline{\underline{7}}$$

c) Gramovy determinanty:



$$\begin{aligned}(B-C) &= (1,-2,7)\\ \vec{u} &= (-2,3,2)\\ \vec{v} &= (2,0,-1)\end{aligned}$$

$$V = P_{\text{podst.}} \cdot \text{výška}$$

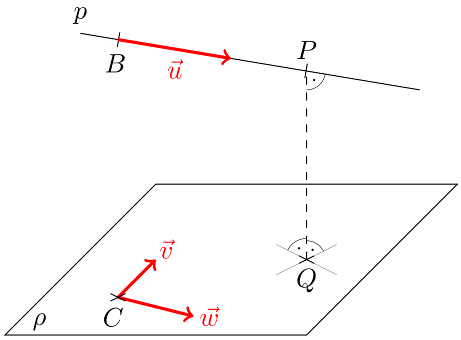
$$d(p,q) = \sqrt{\frac{G(\vec{u},\vec{v},B-C)}{G(\vec{u},\vec{v})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot(B-C) \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot(B-C) \\ (B-C)\cdot\vec{u} & (B-C)\cdot\vec{v} & (B-C)\cdot(B-C)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}\end{vmatrix}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 17 & -6 & 6 \\ -6 & 5 & -5 \\ 6 & -5 & 54\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 5\end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{2401}{49}} = \underline{\underline{7}}$$

8.7 a)

$$\begin{aligned}\vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ jsou LN} &\implies p \nparallel \rho\\ (C-B),\vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ jsou LN} &\implies p,\rho \text{ jsou mimoběžné}\end{aligned}$$

$$\implies \text{existuje společná kolmice } k\text{:} \quad k \perp \vec{u}, k \perp \vec{v}, k \perp \vec{w}$$



$$\begin{aligned} P &= B + t\cdot\vec{u} & t &\in \mathbb{R}\\ Q &= C + s\cdot\vec{v} + r\cdot\vec{w} & s,r &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$(P-Q)\perp\vec{u}, (P-Q)\perp\vec{v}, (P-Q)\perp\vec{w}$$

$$\begin{aligned} P:\quad x_1 &= 1 + t & Q:\quad x_1 &= 3 + s + r\\ x_2 &= -1 + 3t & x_2 &= -8 + 3s + 6r\\ x_3 &= -4 + 5t & x_3 &= 4 - 2r\\ x_4 &= 1 + t & x_4 &= -2 - r\end{aligned}$$

$$(P-Q) = (-2+t-s-r, 7+3t-3s-6r, -8+5t+2r, 3+t+r)$$

$$
\begin{aligned}
(P-Q) \perp \vec{u}: &\quad -2+t-s-r+21+9t-9s-18r-40+25t+10r+3+t+r=0 \\
(P-Q) \perp \vec{v}: &\quad -2+t-s-r+21+9t-9s-18r=0 \\
(P-Q) \perp \vec{w}: &\quad -2+t-s-r+42+18t-18s-36r+16-10t-4r-3-t-r=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-18+36t-10s-\ \ 8r&=0 \\
19+10t-10s-19r&=0 \\
53+\ \ 8t-19s-42r&=0
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\underline{\underline{t=1}} \qquad \underline{\underline{s=1}} \qquad \underline{\underline{r=1}}$$

$$
\begin{aligned}
P &= B + 1\cdot\vec{u} = [2,2,1,2] \\
Q &= C + 1\cdot\vec{v} + 1\cdot\vec{w} = [5,1,2,-3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(P-Q) &= (-3,1,-1,5) \\
|p\rho| = \|P-Q\| &= \sqrt{9+1+1+25} = \underline{\underline{6}}
\end{aligned}
$$

b)

$$d(p,\rho) = d(B,\alpha)$$

$$B=[1,-1,4,1] \qquad\qquad \alpha = \{C; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$$

$$
\begin{array}{l}
x_1 = \ \ 3 + \ t + \ s + \ r \\
x_2 = -8 + 3t + 3s + 6r \longrightarrow (II) - 3\cdot(I): \quad x_2 - 3x_1 = -17 + 3r \quad / \cdot (-1) \\
x_3 = \ \ 4 + 5t \qquad - 2r \longrightarrow (III) - 5\cdot(IV): \quad x_3 - 5x_4 = \ \ 14 + 3r \\
x_4 = -2 + \ t \qquad - \ r
\end{array}
\Bigg) +
$$

$$\alpha: 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 - 31 = 0$$

$$d(p,\rho) = d(B,\alpha) = \frac{|3\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-4) - 5\cdot 1 - 31|}{\sqrt{9+1+1+25}} = \frac{|-36|}{6} = \frac{36}{6} = \underline{\underline{6}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
d(p,\rho) &= d(B,\alpha) \\
\alpha &= \{C; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B-C) &= (-2,7,-8,3) \\
\vec{u} &= (1,3,5,1) \\
\vec{v} &= (1,3,0,0) \\
\vec{w} &= (1,6,-2,-1)
\end{aligned}
$$

$$d(p,\rho)=d(B,\alpha)=\sqrt{\frac{G(\vec{u},\vec{v},\vec{w},B-C)}{G(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}}$$

$$=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w} & \vec{u}\cdot(B-C)\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot(B-C)\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot(B-C)\\ (B-C)\cdot\vec{u} & (B-C)\cdot\vec{v} & (B-C)\cdot\vec{w} & (B-C)\cdot(B-C)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}36 & 10 & 8 & -18\\ 10 & 10 & 19 & 19\\ 8 & 19 & 42 & 53\\ -18 & 19 & 53 & 126\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}36 & 10 & 8\\ 10 & 10 & 19\\ 8 & 19 & 42\end{vmatrix}}}=\sqrt{\frac{11664}{324}}=\sqrt{36}=\underline{\underline{6}}$$

8.8

$$\vec{n}_\rho=(2,6,3)$$
$$\vec{u}=(-3,-1,4)$$

$$2\cdot(-3)+6\cdot(-1)+3\cdot4=0 \implies \vec{u}\in V_\rho \implies (p\parallel\rho\wedge p\not\subset\rho)\vee p\subset\rho$$
$$2\cdot2+6\cdot13+3\cdot7-5\neq0 \implies B\notin\rho \implies p\parallel\rho\wedge p\not\subset\rho$$

$$d(p,\rho)=d(B,\rho)=\frac{|2\cdot2+6\cdot13+3\cdot7-5|}{\sqrt{4+36+9}}=\frac{98}{7}=\underline{\underline{14}}$$

8.9

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ jsou LN $\implies$ p, ρ jsou různoběžné nebo mimoběžné

$$(P-R)=(2,7,-2,-9)$$

$$\begin{vmatrix}2 & 7 & -2 & 9\\ -2 & 0 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-9\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2 & 7 & -2\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 7 & -2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-9\cdot(-5)+2\cdot\cdot1-2\cdot19=9\neq0$$

$\implies$ $(P-R)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou LN $\implies$ p, ρ jsou mimoběžné

$$d(p,\rho)=d(P,\alpha)$$
$$\alpha=\{R;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$$

$$\alpha:\quad\begin{aligned} x_1+2&=-2t-s+r\\ x_2+4&=-s+2r\\ x_3&=-t-2s+r\\ x_4-4&=2t+2s\end{aligned}\qquad t,s,r\in\mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+2 & -2 & -1 & 1 \\ x_2+4 & 0 & -1 & 2 \\ x_3 & -1 & -2 & 1 \\ x_4-4 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} x_2+4 & 0 & -1 \\ x_3 & -1 & -2 \\ x_4-4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x_1+2 & -2 & -1 \\ x_3 & -1 & -2 \\ x_4-4 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1+2 & -2 & -1 \\ x_2+4 & 0 & -1 \\ x_4-4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 32 = 0$$

$$d(p,\rho) = d(P,\alpha) = \frac{|2\cdot 0 - 4\cdot 3 + 6\cdot(-2) + 5\cdot(-5) - 32|}{\sqrt{4+16+36+25}} = \frac{81}{\sqrt{81}} = \underline{\underline{9}}$$

□

9 Odchylky

Úloha 9.1 *V prostoru E_3 určete odchylku rovin ρ a σ, je-li*

$$\rho = \{A = [-1,2,-5]\,; \vec{u} = (1,1,1)\,, \vec{v} = (1,-1,1)\}\,,$$
$$\sigma = \{B = [3,-7,8]\,; \vec{x} = (1,0,0)\,, \vec{y} = (1,1,0)\}\,.$$

Úloha 9.2 *V prostoru E_3 je dána přímka $p = \{P = [1,2,-1]\,; \vec{u} = (1,a,-1)\}$, $a \in \mathbb{R}$ a rovina $\rho : x + y - z + 8 = 0$. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby*

a) $p \perp \rho$,
b) $|\sphericalangle p\rho| = 30^\circ$,
c) $p \parallel \rho$.

Úloha 9.3 *V prostoru E_2 určete odchylku přímek p a q, je-li*

$$p: \quad 2x + y - 3 = 0,$$
$$q: \quad 3x - y + 5.$$

Úloha 9.4 *V prostoru E_2 napište rovnici přímky p, která prochází bodem $A = [-1,1]$ a s přímkou q svírá úhel 45°, je-li*

$$q: \quad .2x + 3y - 6 = 0.$$

Řešení.

9.1

$$\vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v} = (2,0,-2)$$
$$\vec{n}_\sigma = \vec{x} \times \vec{y} = (0,0,1)$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{||\vec{n}_\rho|| \cdot ||\vec{n}_\sigma||} = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

9.2 a)

$$\vec{n}_\rho = (1,1,-1) \qquad\qquad \vec{u}_p = (1,a,-1)$$

Má-li být $p \parallel \rho$, musí být $\vec{n}_\rho$, $\vec{u}_p$ LZ.

$$(1,1,-1) = k \cdot (1,a,-1) \implies k = 1 \implies \underline{\underline{a = 1}}$$

b)

$$\sin 30^\circ = \frac{|1+a+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+a^2}}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{|a+2|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+a^2}}$$
$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+a^2} = 2\cdot|a+2| \quad /^2$$
$$3\cdot\left(a^2+2\right) = 4\cdot(a+2)^2$$
$$3a^2+6 = 4a^2+16a+16$$
$$a^2+16a+10=0$$

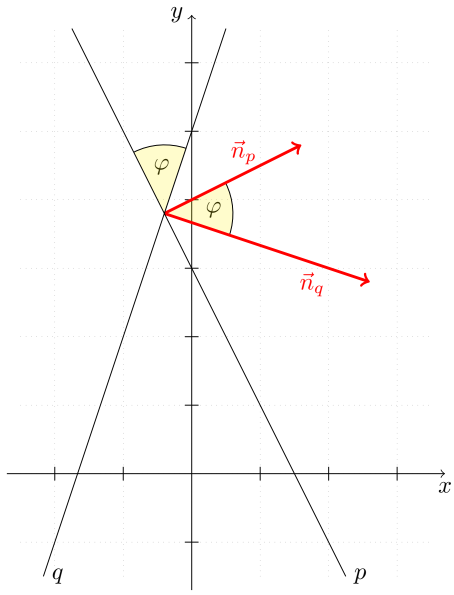
$$D = 256-40 = 216 = 6\cdot 36$$
$$a_{1,2} = \frac{-16\pm\sqrt{6\cdot 36}}{2} = \begin{cases}\underline{\underline{-8+3\sqrt{6}}}\\ \underline{\underline{-8-3\sqrt{6}}}\end{cases}$$

c)

$$p \parallel \rho \implies \vec{u}_p \perp \vec{n}_\rho$$

$$\vec{u}_p\cdot\vec{n}_\rho = 0$$
$$(1,a,-1)\cdot(1,1,-1) = 0$$
$$1+a+1 = 0$$
$$\underline{\underline{a=-2}}$$

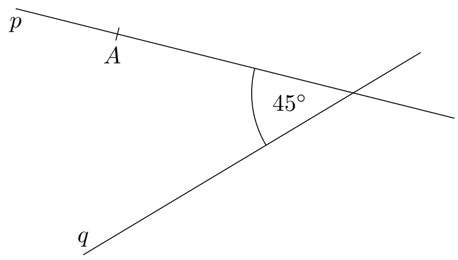
9.3



$$\vec{n}_p = (2,1)$$
$$\vec{n}_q = (3,-1)$$

$$\cos\varphi = \frac{|6-1|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+1}} = \frac{5}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

9.4



$$\vec{n}_q = (2,3)$$
$$\vec{n}_p = (a,b) \neq (0,0)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(45^\circ\right) = \frac{|2a+3b|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vektor (a, b) je dán až na nenulový násobek.

- pro $a = 0$ dostaneme $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} \implies$ nemá řešení
- pro $a \neq 0$ můžeme vektor vydělit číslem a a řešit úlohu s jednodušším vektorem $(1, c)$, kde $c = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{|2+3c|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{1+c^2}} \\
\sqrt{26} \cdot \sqrt{1+c^2} &= 2 \cdot |2+3c| \quad /^2 \\
26 \cdot \left(1+c^2\right) &= 4 \cdot (2+3c)^2 \\
26 + 26c^2 &= 16 + 48c + 36c^2 \\
10c^2 + 48c - 10 &= 0 \\
5c^2 + 24c - 5 &= 0
\end{aligned}$$

$$c_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576+100}}{10} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{p_1} &= \left(1, \frac{1}{5}\right) \sim (5, 1) \\
\vec{n}_{p_2} &= (1, -5)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrr}
 & p_1: & 5x + y + d = 0 \\
A \in p_1: & & -5 + 1 + d = 0 \\
 & & d = 4 \\
 & \underline{\underline{p_1:}} & \underline{\underline{5x + y + 4 = 0}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
 & p_2: & x - 5y + e = 0 \\
A \in p_2: & & -1 - 5 + e = 0 \\
 & & e = 6 \\
 & \underline{\underline{p_2:}} & \underline{\underline{x - 5y + 6 = 0}}
\end{array}$$

$\square$