Odmocniny

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

2020

Odmocniny

definice: $x = \sqrt{a}\,, \quad a \geq 0$ takové nezáporné x, pro které platí

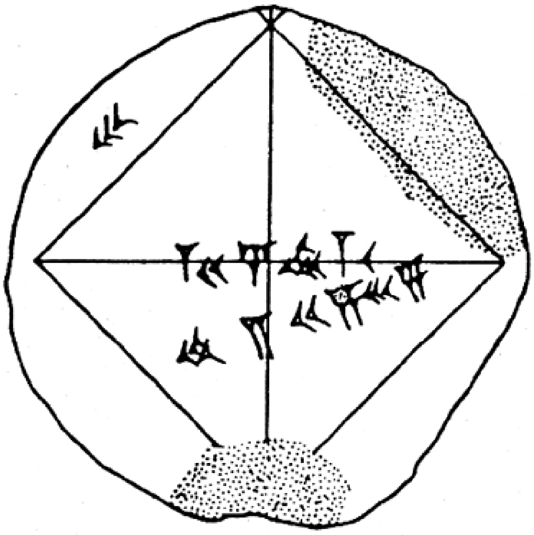
$$x^2 = a$$

Existuje takové x?

Tj. $\exists!$ průsečík $x_0 \geq 0$ funkce $y = x^2 - a$ s osou x?

- existuje: funkce je spojitá
  - pro $a > 1: \quad y(0) < 0, \quad y(a) > 0$
  - pro $0 < a < 1: \quad y(0) < 0, \quad y(1) > 0$
    dle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot tedy $\exists x_0$
  - pro $a = 1: \quad y(1) = 0$
  - pro $a = 0: \quad y(0) = 0$
- právě jeden: funkce je na $\mathbb{R}_0^+$ rostoucí, tj. prostá

Odmocniny

Tabulka YBC 7289

$$\sqrt{2} = 1;\ 24,\ 51,\ 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,\ 414\,21|2\,96\ldots$$

Odmocniny

Hérón z Alexandrie (1. stol. po Kr.)
spis **Metrika**, I, 8:

Existuje obecný postup jak nalézt bez znalosti výšky obsah libovolného trojúhelníku, jsou-li dány tři strany.

Nechť mají strany trojúhelníku délku 7, 8, 9 jednotek.
Sečti 7, 8 a 9, vznikne 24. Z nich vezmi polovinu, vznikne 12.

Odeber 7 jednotek, zbude 5. Opět od těch 12 odeber 8 jednotek, zbudou 4. A ještě těch 9, zbudou 3.

Vynásob 12 pěti, vznikne 60. To čtyřmi, vznikne 240. To třemi, vznikne 720.

Z nich vezmi stranu a to bude obsah toho trojúhelníku.

$$S_\triangle = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Odmocniny

Hérónova Metrika – pokračování:

Jelikož druhá odmocnina 720 není racionální, určíme ji s nejmenší chybou takto:
Jelikož je 720 nejbližší čtverec 729 a jeho strana je 27, vyděl 720 27, vznikne 26 a 2/3. Přidej 27, vznikne 53 a 2/3. Z toho polovina,
vznikne 26 1/2 1/3. Nejbližší strana 720 je tedy 26 1/2 1/3.

26 1/2 1/3 vynásobeno samo sebou dává 720 1/36 ...

$$x_2 = \frac{\frac{720}{x_1} + x_1}{2} = \frac{720 + x_1^2}{2x_1}$$

$$x_1 = 27$$

Odmocniny

Výpočet iterační metodou

$$x^2 = a$$

Pseudoodvození iteračního předpisu

$\sqrt{720} = ?$

$$\begin{aligned} x^2 &= 720 && / \quad + x^2 \\ 2x^2 &= 720 + x^2 && / \quad : 2x \\ x &= \frac{720 + x^2}{2x} && \Longrightarrow \quad \text{posloupnost zadaná rekurentně:} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{720 + x_n^2}{2x_n}, \qquad x_0 > 0}$$

Odmocniny

Výpočet $\sqrt{720}$

$$x_{n+1} = \frac{720 + x_n^2}{2x_n}, \qquad x_0 > 0$$

x_0	27
x_1	$26{,}8\overline{3}$
x_2	26,8328157|34989648...
x_3	26,83281572999747635|737447...
x_4	26,8328157299974763569100840247753148252|914...
x_5	26,832815729997476356910084024775314825287420315338308691250766944926251107653 65|9 ...

počet platných cifer za des. čárkou: 2 7 17 37 77 158 318 640
tj. po 6 iteracích přesnost na více než 150 míst

Odmocniny

Náznak odvození vztahu pro výpočet $\sqrt{a}$, kde $a \geq 0$

$\sqrt{a} = n + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < 1, n \in \mathbb{N}$

$a = (n+\varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \approx n^2 + 2n\varepsilon$

$$\varepsilon \approx \frac{a - n^2}{2n}$$

$$\sqrt{a} \approx n + \varepsilon = n + \frac{a - n^2}{2n}$$

$$\sqrt{a} \approx \frac{a + n^2}{2n}$$

n nemusí být nutně z $\mathbb{N}$, může to být i lepší aproximace,
ε je pak ještě menší (výhoda při zanedbání ε^2)
postup tedy můžeme opakovat:

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}, \qquad 0 < x_0 < \sqrt{a}$$

Výpočet k-té odmocniny

definice: $x = \sqrt[k]{a}$ takové nezáporné x, pro které platí

$$x^k = a$$

($k \in \mathbb{N}, a \geq 0$, pro lichá k lze $a \in \mathbb{R}$)

Zobecnění postupu pro druhou odmocninu na k-tou odmocninu

$\sqrt[k]{5} = ?$

$x^k = 5 \qquad / \quad + (k-1)x^k$

$k \cdot x^k = 5 + (k-1)x^k \qquad / \quad : k \cdot x^{k-1}$

$x = \dfrac{5 + (k-1)x^k}{k \cdot x^{k-1}}$ posloupnost zadaná rekurentně:

$$x_{n+1} = \frac{5 + (k-1)x_n^k}{k \cdot x_n^{k-1}}, \qquad x_0 > 0$$