KUŽELOSEČKY

Zdeněk Halas

V této kapitole se zaměříme na některé historické zajímavosti a souvislosti z teorie kuželoseček. Odpovíme na několik otázek:

- Jaké máme první doklady o teorii kuželoseček?
- Proč se kuželosečky začaly zkoumat?
- Odkud se vzaly názvy *elipsa, parabola, hyperbola*?

Historické postupy budeme kvůli lepší srozumitelnosti prezentovat v modernizované podobě.

Obsah

1 Počátky zkoumání kuželoseček

Objev kuželoseček je v antické tradici připisován Menaichmovi (1. polovina 4. stol. př. Kr.), a to v souvislosti s řešením problému nalezení dvou středních úměrných, tj. nalezení dvou neznámých délek x a y takových, aby pro zadané délky a, b platilo

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Právě na tuto úlohu převedl Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.) jeden ze tří slavných problémů antické matematiky[1] – *zdvojení krychle*[2]. Zvolíme-li totiž $a = 2b$, dostaneme po úpravě z předchozího vztahu

$$y^3 = 2b^3.$$

Je tedy nalezena délka y hrany krychle, která má oproti zadané krychli s délkou hrany b dvojnásobný objem. Menaichmos vyřešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček; algebraicky zapsáno:

$$xy = ab, \qquad y^2 = bx,$$

nebo

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx.$$

Z dochovaného zlomku obsahujícího toto řešení[3] však vyplývá, že Menaichmos pracoval s kuželosečkami na poměrně vysoké úrovni. Zdá se tedy být pravděpodobné, že byly studovány už před ním.

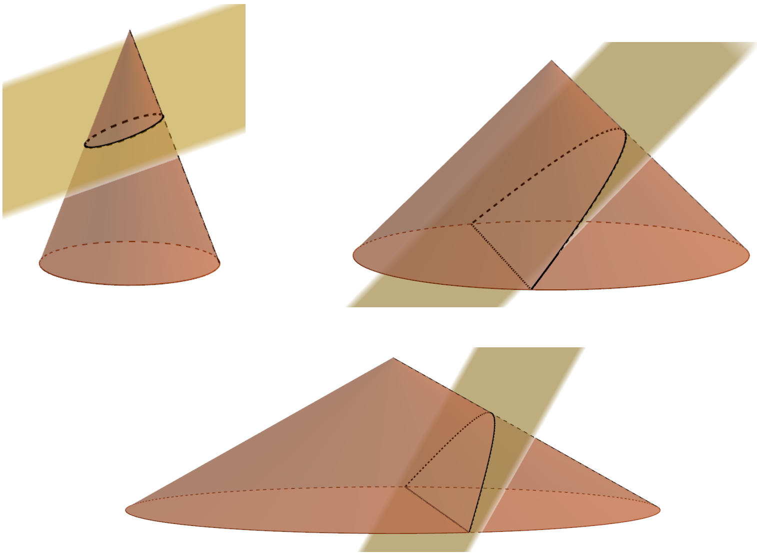
Kuželosečky byly zpočátku studovány jako křivky vznikající řezem pláště kuželu rovinou vedenou kolmo na některou povrchovou přímku. Jednotlivé kuželosečky pak byly získány volbou úhlu při vrcholu kuželu. Elipsa tak byla nazývána *řezem ostroúhlého kuželu*, parabola *řezem pravoúhlého kuželu* a hyperbola *řezem tupoúhlého kuželu*. Tuto terminologii používá ve svých spisech například Archimédés ze Syrákús. Podrobněji je historie kuželoseček zpracována například v [2].

---

[1] Jednalo se o *kvadraturu kruhu* – zkonstruovat stranu čtverce, který má stejný obsah jako kruh daného poloměru (nelze provést eukleidovsky, číslo π je totiž transcendentní), *trisekci úhlu* – k zadanému úhlu zkonstruovat jeho třetinu, a *zdvojení krychle* – k dané úsečce, která je hranou krychle, zkonstruovat úsečku, která je hranou krychle dvojnásobného objemu ($\sqrt[3]{2}$ nelze zkonstruovat eukleidovsky). V 19. století bylo algebraickými prostředky dokázáno, že tyto konstrukce nejsou proveditelné eukleidovsky, tj. pouze pomocí pravítka a kružítka.

[2] Vypráví se, že krétský král Mínós ukládající do hrobu svého syna Glauka byl nespokojen, že je hrobka malá, a tak ji nechal zdvojnásobit, tj. „zvětšit v tomto poměru ve všech směrech“ (rozumí se tím však zdvojnásobit její objem). Později prý lidem z ostrova Délos věštba uložila zdvojnásobit jejich oltář, což je opět úkol vedoucí na problém zdvojení krychle. Geometrům se stále nedařilo takový poměr najít.

[3] Viz Eutokiův komentář k Archimédovu spisu *O kouli a válci*, odst. 78.13--80.24, publikovaný v J. L. Heiberg (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii, vol. III.,* Teubner, Leipzig, 1915.



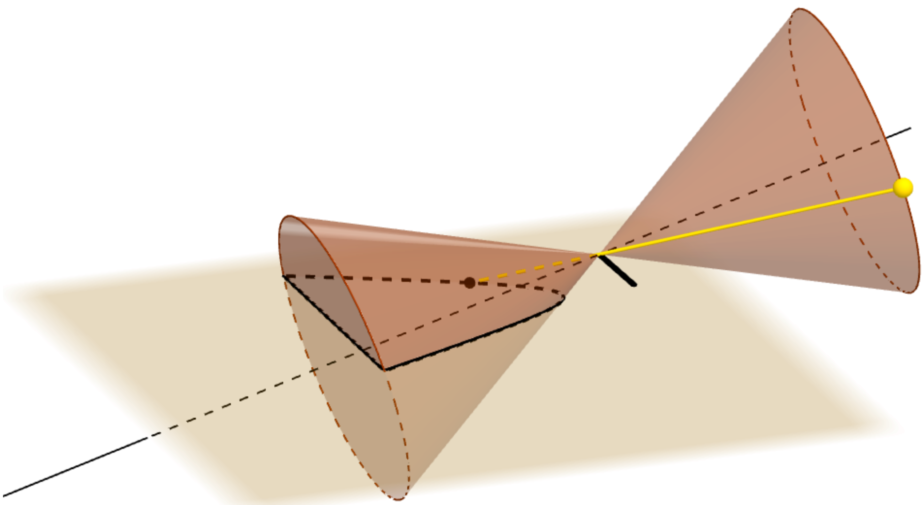
Obr. 10: Starší teorie kuželoseček (Archimédés), řezy pláště kuželu rovinou kolmou na jednu površku.

2 Kuželosečky a sluneční hodiny

V této kapitole si ukážeme jeden z příkladů, jak se poznatky o kuželosečkách projevily v praxi. Zpočátku se pro měření času používal svislý obelisk, tzv. *gnómón*. Čas se odečítal z délky jeho stínu, což bylo zatíženo značnými nepřesnostmi, neboť se délka stínu v průběhu roku mění. Gnómony byly užívány například v Egyptě či Mezopotámii. Odtud se jejich používání rozšířilo do Řecka. Právě tam se v průběhu 7. stol. př. Kr. objevil nový, mnohem přesnější typ – horizontální duté polokulové sluneční hodiny zvané *skafé* (viz obr. 4), které měly rovnoměrnou stupnici nanesenou na vnitřní plochu polosféry a hrot ukazatele ve středu této sféry. Jejich výhodou byla nezávislost na dni v roce, čímž bylo dosaženo mnohem větší přesnosti, neboť se čas neodečítal z délky stínu, ale z jeho směru. Vycházelo se tak vlastně ze zemské rotace. Výroba takovýchto polokulových slunečních hodin však byla poměrně náročná.

Na konstrukci byly mnohem jednodušší sluneční hodiny rovinné. První takové se objevily v Egyptě ve 4. stol. př. Kr. Zohledňovaly různé deklinace Slunce během roku, ale byly zatím vytvářeny pouze experimentálně. Aby bylo možno zkonstruovat *datové čáry*, tj. křivky, po nichž se pohybuje konec stínu ukazatele v průběhu daného dne v roce, bylo užitečné znát jejich základní matematické vlastnosti.

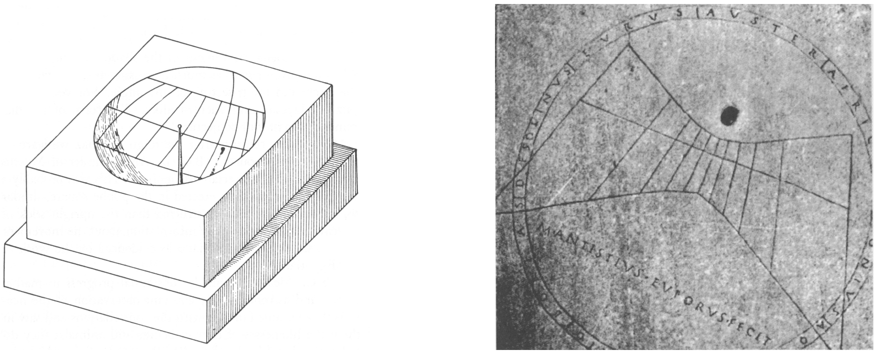
Není nijak obtížné odvodit, že datovými čarami jsou právě kuželosečky. Představíme-li si totiž denní dráhu Slunce po obloze jako kružnici (část jí je pod obzorem) a špičku ukazatele slunečních hodin jako bod, je ihned zřejmé, že spojením všech bodů této kružnice s tímto jedním bodem vznikne kuželová plocha. Jejím průnikem s rovinou číselníku je tedy nutně kuželosečka. V našich zeměpisných šířkách se jedná vesměs o hyperboly.[4]



Obr. 10: Rovinné sluneční hodiny – datové čáry

Jelikož se výška Slunce na obloze v průběhu roku mění, je možno postupně pozorovat soustavu hyperbol (s výjimkou jarní a podzimní rovnodennosti, kdy hyperboly přecházejí v přímku). S jejich pomocí lze odečítat datum. Vyznačení datových čar (alespoň pro slunovraty a rovnodennosti) na číselníku slunečních hodin také usnadňuje přesné narýsování čar hodinových.

[4] Na pólu se jedná o kružnice, neboť dráha Slunce v průběhu dne se pozorovateli jeví jako kružnice umístěná rovnoběžně se zemí. Tato kružnice v průběhu roku stoupá či klesá pod obzor (polární den a noc). Směrem k rovníku se pak tato řídicí kružnice kuželové plochy naklání čím dál tím více, takže datové čáry přecházejí postupně v elipsy, paraboly a v širokém pásu mezi polárními kruhy v hyperboly.



Obr. 4: Sluneční hodiny: skafé a rovinné sluneční hodiny (zdroj: [6])

Rovinné sluneční hodiny opatřené datovými čarami se v antice skutečně objevily. Přirozeně až poté, co se rozšířila alespoň základní znalost kuželoseček. Vzhledem k jejich relativně snadné výrobě pak starší typ – skafé – postupem času ustoupil slunečním hodinám rovinným.

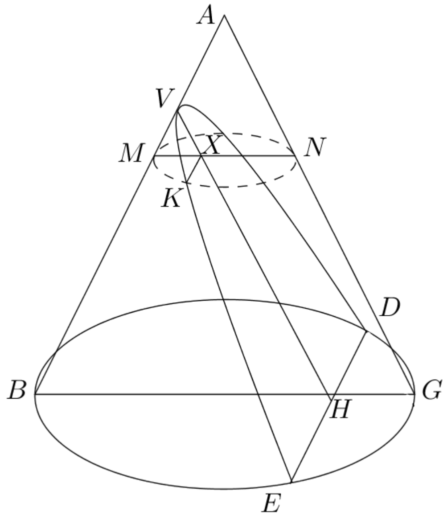
3 Názvy kuželoseček

Současnou terminologii však zavedl až Apollónios z Pergé (kolem roku 200 př. Kr.) ve svém díle *Kónika* (viz např. [8]),[5] které se stalo na téměř 2 000 let základním spisem o kuželosečkách. Toto dílo se nezachovalo celé, z původních osmi kapitol se jich dochovalo pouze prvních sedm, přičemž poslední tři z nich jen v arabském překladu. Apollónios studoval obecně řezy kosé kuželové plochy. Jeho dílo je poměrně náročné, proto se omezíme na zjednodušené odvození charakteristické vlastnosti paraboly chápané jako řez kuželové plochy rovinou rovnoběžnou s právě jednou površkou, přičemž budeme využívat moderní symboliku. O elipse a hyperbole pak pojednáme zjednodušeně s využitím analytické geometrie.

Uvažujme pro jednoduchost kolmou kuželovou plochu a veďme rovinu rovnoběžnou s povrchovou přímkou AG (viz obr. 1). Ukážeme, že řezem je parabola. Nechť řídicí kružnice této kuželové plochy prochází body $BDGE$ a nechť kružnice KMN leží v rovině rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice. Její průměr je MN, bod K na ní leží a KX je rovnoběžná s DE a kolmá na MN. Podobně i DE je kolmá na BG. Jelikož je trojúhelník KMN pravoúhlý (Thalétova kružnice), plyne z Eukleidovy věty o výšce

$$|KX|^2 = |MX| \cdot |XN| .$$

[5] Názvy parabola, hyperbola a elipsa se poprvé vyskytují postupně ve větách 11, 12 a 13 první knihy *Kónik*.



Obr. 1: Parabola jako řez kuželu[6]

Jelikož je rovina řezu rovnoběžná s povrchovou přímkou AG, tak $|XN| = |HG|$. Navíc z podobnosti trojúhelníků $\triangle VMX$ a $\triangle VBH$ dostáváme

$$\frac{|MX|}{|BH|} = \frac{|VX|}{|VH|}\,.$$

Proto

$$|KX|^2 = |MX| \cdot |XN| = \frac{|VX| \cdot |BH|}{|VH|} \cdot |HG| = |VX| \cdot \frac{|BH| \cdot |HG|}{|VH|}\,.$$

Z předchozího vztahu také vyplývá, že poměr $\frac{|BH|}{|VH|} = \frac{|MX|}{|VX|}$ nezávisí na volbě kruhového řezu rovnoběžného s řídicí kružnicí, je proto konstantní. Podobně se také zachovává délka úsečky HG. Výraz $\frac{|BH|\cdot|HG|}{|VH|}$ je tedy konstantou. Označíme-li ji p, $|KX| = y$ a $|VX| = x$, dostaneme známou rovnici paraboly

$$y^2 = p\,x\,.$$

Tuto rovnici můžeme interpretovat jako úlohu nalézt k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby měl obdélník s těmito stranami stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y. Tato úloha se týká tzv. *přikládání ploch* (řecky paraballó, srov. též Eukleidovy *Základy*, I, 44). Odtud pochází název parabola (řecky parabolé).

[6] Tento obrázek vznikl na základě překladu Apollóniových *Kónik* [8]. Nejedná se tedy o přesný rys v některém z užívaných zobrazení, ale o schematizující náčrtek. Podobné náčrtky nacházíme i ve starých rukopisech a vydáních textů starověkých matematiků.

Obdobným způsobem bychom se mohli zabývat i elipsou a hyperbolou. Odvození je však v těchto případech náročnější.[7] Výsledný vztah by bylo nicméně možno v obou případech přepsat pomocí podobné rovnice jako u paraboly, rozdíl by byl jen v jednom přidaném členu. Snadno ji lze odvodit pomocí analytické geometrie. Rovnice elipsy, resp. hyperboly, jejíž jeden vrchol prochází počátkem, je totiž

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

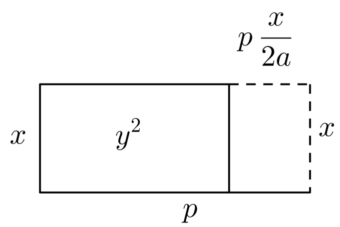
neboli po úpravě

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\, x \mp \frac{b^2}{a^2}\, x^2.$$

Označíme-li $p = \frac{2b^2}{a}$, přejde tato vrcholová rovnice na tvar

$$y^2 = p\, x \mp \frac{p}{2a}\, x^2,$$

který můžeme v případě znaménka minus interpretovat jako úlohu přiložit k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby výsledný obdélník obsahoval menší obdélník (plnou čarou) se stranou x, který by měl stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y, a zároveň byl menší o obdélník (čárkovaně) podobný zadanému obdélníku se stranami $2a$, p. Velkému obdélníku tedy „chybí“ (řecky elleipó) čárkovaný obdélník a odtud má elipsa svůj název (elleipsis).



Obr. 2: Elipsa – přikládání ploch

V případě znaménka plus by obdélník o obsahu y^2 přesahoval (řecky hyperballó) obdélník se stranami p, x. Tento případ by odpovídal hyperbole (řecky hyperbolé).

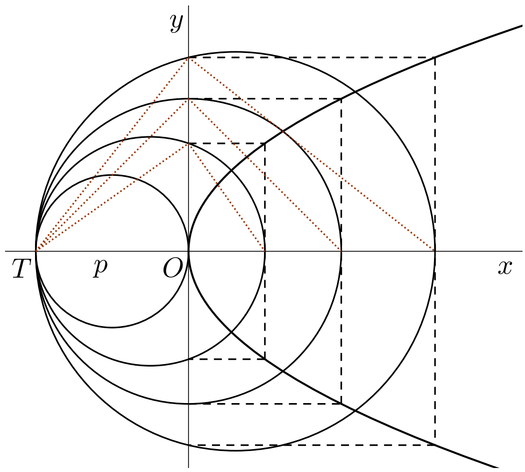
Stručně jsme tak nastínili původ názvů jednotlivých regulárních kuželoseček. Používali jsme přitom analytickou geometrii a moderní matematický aparát. Historicky přesnější odvození a znění příslušných vět, které je však o něco náročnější, lze nalézt například v [8], případně [7].

[7] Viz např. [8], kapitola I, věty 12 a 13.

4 Konstrukce paraboly

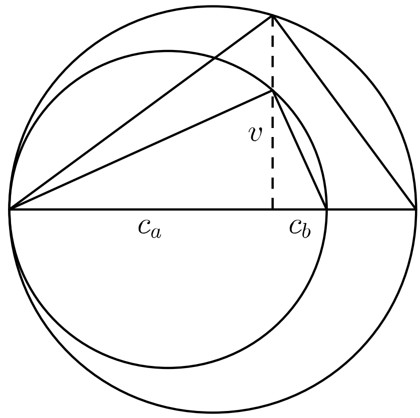
Nyní vytěžíme z obrázku 1 jednoduchou, ale poměrně zajímavou souvislost. Jedná se o konstrukci paraboly, která se nevyskytuje příliš často. Poprvé se objevuje v komentáři k Apollóniovým *Kónikám*, který sepsal perský lékař, astronom a matematik ibn Síná (asi 980--1037), známý též jako Avicenna.

Pokud zakreslíme do jedné roviny kruhové řezy kolmé kuželové plochy vedené rovinami rovnoběžnými s její řídicí kružnicí (viz obrázek 1) a připojíme-li také příslušnou parabolu, dostaneme přímo návod na jednoduchou konstrukci bodů paraboly.



Obr. 3: Konstrukce paraboly

Na tuto geometrickou situaci můžeme následně pohlížet jako na přímou aplikaci Eukleidovy věty o výšce, která je také podstatou původního Apollóniova odvození na kuželové ploše.



Obr. 4: Eukleidova věta o výšce

$$v^2 = c_a \cdot c_b \qquad y^2 = p \cdot x \qquad p = |TO|$$

Označíme-li p vzdálenost $|TO|$ (průměr kružnice dotýkající se osy y), dostaneme ihned rovnici paraboly

$$y^2 = p \cdot x\,.$$

5 Menaichmos – hyperbola a nepřímá úměrnost

Z děl matematiků působících před Eukleidem se nám dochovalo jen několik zmínek z pozdější doby. Jedním z nich je Menaichmos (polovina 4. stol. př. Kr.), který byl současníkem Eudoxa a Platóna. V krátkém úryvku[8] (necelé dvě strany) převádí problém nalezení dvou středních úměrných na úlohu nalézt průsečík dvou kuželoseček.

Modernizovaně řečeno, jsou-li dány veličiny a a b, je úkolem nalézt veličiny x a y takové, aby

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Tuto soustavu lze upravit například na dvojici rovností

$$x^2 = ay, \qquad ab = xy$$

reprezentujících jedno ze dvou Menaichmových řešení, která se nám dochovala. Tím je původní úloha převedena na problém nalezení průsečíku dvou kuželoseček – paraboly a hyperboly.

Ponechme nyní stranou detaily Menaichmova textu a povšimněme si uvedené rovnice hyperboly: lze ji snadno napsat jako vztah reprezentující nepřímou úměrnost

$$y = \frac{ab}{x}\,.$$

Proč je však grafem nepřímé úměrnosti hyperbola?

Z pozice vysokoškolské matematiky je odpověď snadná: rovnici tvaru $xy = k$ lze pomocí lineární transformace $x = x' - y'$, $y = x' + y'$ ihned převést na rovnici $(x' - y') \cdot (x' + y') = k$, neboli na rovnici rovnoosé hyperboly

$$\frac{x'^2}{k} - \frac{y'^2}{k} = 1\,.$$

Transformace soustavy souřadnic (či alespoň otočení) však nemusí vždy patřit do standardní výbavy středoškoláka. Menaichmos tu přináší inspirativní pohled na hyperbolu jako křivku v rovině, pro jejíž body platí, že

součin vzdáleností od dvou různoběžek (asymptot) je konstantní.

To je vlastně geometrická interpretace vztahu $xy = k$, omezíme-li se na větev v 1. kvadrantu a $k > 0$: x je vzdálenost bodu hyperboly od jedné asymptoty (osy y) a y vzdálenost od druhé asymptoty (osy x).

[8] Objevuje se v Eutokiově komentáři k Archimédovu spisu *O kouli a válci II*, viz [7], strany 92 až 96.

Ukažme nyní, že tuto vlastnost mají všechny body vyhovující rovnici hyperboly známé z analytické geometrie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{1}$$

Asymptotami této hyperboly jsou přímky

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,. \tag{2}$$

Vzdálenosti libovolného bodu $X = [x, y]$ od těchto asymptot jsou

$$d_1(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,, \qquad d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

Leží-li bod $X = [x, y]$ na hyperbole dané rovnicí (1), můžeme v součinu vzdáleností $d_1(X) \cdot d_2(X)$ nahradit součin výrazů vzniklých v čitateli jedničkou:

$$d_1(X) \cdot d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\,. \tag{3}$$

Výraz $\dfrac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ neobsahuje proměnné x, y, je tedy vzhledem k nim konstantní. Vyhovují-li tudíž souřadnice bodu $X = [x, y]$ rovnici hyperboly (1), je součin $d_1(X) \cdot d_2(X)$ jeho vzdáleností od jejích asymptot (2) na volbě tohoto bodu X nezávislý. Tím jsme ověřili, že všechny body hyperboly dané rovnicí (1) splňují „Menaichmovu vlastnost“.[9]

Tuto vlastnost lze snadno pozorovat přímo na rovnici (1), jejíž levá strana nápadně připomíná po rozkladu na součin

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$$

rovnici (3). Nyní si stačí uvědomit, že každý z těchto činitelů figuruje v čitateli výrazu vyjadřujícího vzdálenost bodu od asymptoty. Oběma činitelům chybí jen určitá konstanta ve jmenovateli a absolutní hodnota. Vhodnou konstantou (přesněji součinem převrácených hodnot norem normálových vektorů obou asymptot) je možno celou rovnici vynásobit. Absolutní hodnotu lze také doplnit, neboť pro všechny body větve hyperboly ležící vpravo od osy y jsou oba činitele kladné; pro všechny body

[9] Rovnici (3) splňují dvě hyperboly, obě mají asymptoty (2). Jedna hyperbola má větve nalevo a napravo od osy y, druhá má větve nad a pod osou x.

větve ležící vlevo od osy y jsou sice oba činitele záporné, jejich součin je však kladný.

Menaichmův přístup k hyperbole tedy poskytuje zajímavou geometrickou interpretaci nepřímé úměrnosti a standardní rovnice hyperboly.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Měření kruhu*. In Z. Halas (ed.), *Archimédés, několik pohledů do jeho života a díla*, Matfyzpress, Praha, 2012, str. 45--53.
[Dostupné z http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371]

[2] J. L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1945.

[3] Z. Halas, *Aplikace matematiky v běhu věků*. In A. Slavík (ed.), *Matematika a reálný svět*, Matfyzpress, Praha, 2012, str. 93--98.
[Dostupné z http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/sbornik.pdf]

[4] Z. Halas, *Výpočty hodnot goniometrických funkcí*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.), *Matematika v proměnách věků VI*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 45, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 120--140.
[Dostupné z http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401740]

[6] M. Nosek, M. Brož (eds.), *Sluneční hodiny na pevných stanovištích*, Academia, Praha, 2004.

[7] Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, Praha, 2011.

[8] R. C. Taliaferro, *Apollonius of Perga, Conics*, Books I–III, Green Lion Press, Santa Fe, 2000.