

Max Dehn a třetí Hilbertův problém

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

Dějiny matematiky II

Osnova přednášky

Cesta k obsahu mnohoúhelníků

Ekvidekomposabilita ve 3D

Objem čtyřstěnu

Třetí Hilbertův problém

Christian Gerling

Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929)

Cesta k obsahu mnohoúhelníků

Obsah obecně $\Rightarrow$ obsah mnohoúhelníků

$$\forall A, B \in \mathcal{U}: A \cap B \in \mathcal{U}, A \cup B \in \mathcal{U}$$

1. $S(A) \geq 0, S(\emptyset) = 0$
2. $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$
3. $A \cong B \Rightarrow S(A) = S(B)$
4. $\exists E \in \mathcal{U}; S(E) = 1$

odtud také plyne:

$$A \subset B \Rightarrow S(A) \leq S(B)$$

Postup ve škole:

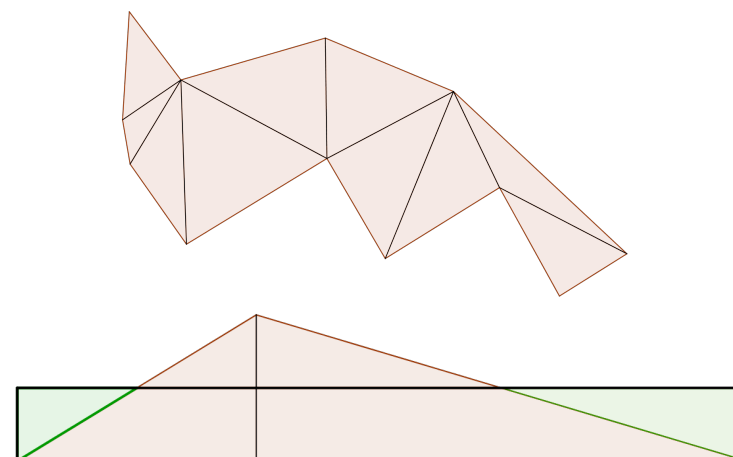
obdélník $\rightarrow$ rovnoběžník $\rightarrow$ trojúhelník

obdélník $\rightarrow$ lichoběžník

Cesta k obsahu mnohoúhelníků

Ekvidekomposabilita ve 2D

v Eukleidových *Základech* se předpokládá (I, 45):
každý mnohoúhelník lze rozložit na trojúhelníky



Ekvidekomposabilita ve 2D

Def. Dva mnohoúhelníky jsou *ekvidekomposabilní*:

lze je napsat jako sjednocení týchž nepřekrývajících se trojúhelníků

Bolyai–Gerwienova věta (1814, 1832, 1833)

Každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní.

Tj. definici obsahu mnohoúhelníků lze založit na rozkladech na trojúhelníky.

Ekvidekomposabilita ve 2D

V 90. letech 20. stol. se podařilo dokázat, že **stačí translace**:

každý mnohoúhelník lze rozdělit na konečně mnoho mnohoúhelníků, z nichž lze pouze pomocí translace složit čtverec (stejného obsahu, jako původní mnohoúhelník)

M. Laczkovich: Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem, Journal für die reine und angewandte Mathematik 404(1990), 77–117.

M. Laczkovich: Paradoxical decompositions: a survey of recent results, Proc. First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progress in Mathematics 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

Historie důkazu Bolyai–Gerwienovy věty

William Wallace, 1807: formulace problému

John Lowry, 1814: první důkaz:

W. Wallace, J. Lowry, Question 269, New Series of the Mathematical Repository 3(1814). Thomas Leybourn (ed.), 44–46.

Farkas Bolyai, 1832: nezávislý důkaz:

W. Bolyai de Bolya, Tentamen. Iuventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentialiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici, Maros Vásárhelyini; tomus primus 1832, tomus secundus 1833.

Paul Gerwien, 1833: nezávislý důkaz:

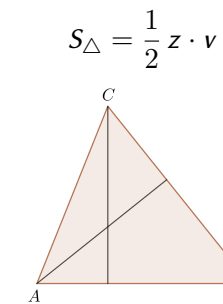
P. Gerwien, Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke, Journal für die reine und angewandte Mathematik 10(1833), 228–234.

Hilbert: obsah trojúhelníku

nezávislé na Archimédově axiomu

Hilbert řeší v Grundlagen obsah trojúhelníku matematicky čistě, ale ...

zkrátka definuje



korektnost: dle věty *uu* jsou pravoúhlé trojúhelníky podobné

$$\frac{c}{v_a} = \frac{a}{v_c} \implies c \cdot v_c = a \cdot v_a$$

Ekvidekomposabilita ve 3D

Existuje rozklad libovolného mnohostěnu na čtyřstěny
(pouze s využitím původních vrcholů)?

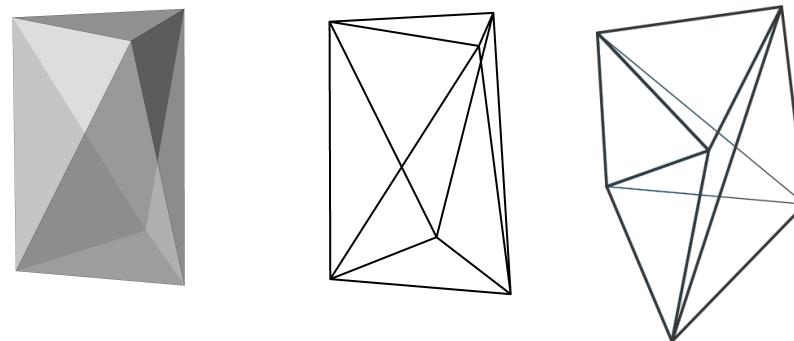
1911 Nels Johann Lennes:

ne

1928 Erich Schönhardt

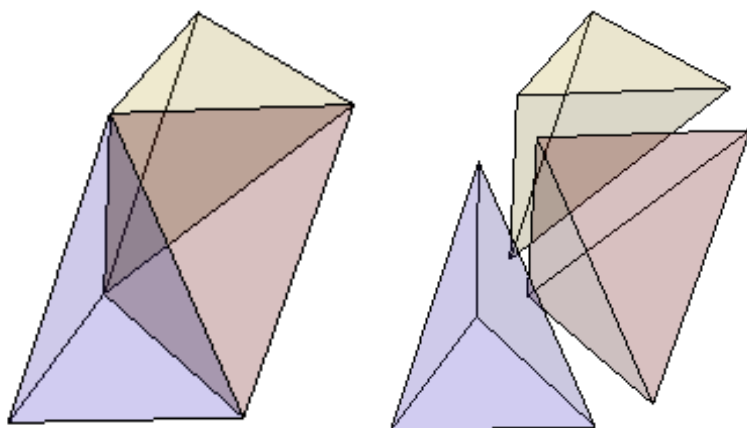
příklad – Schönhardtovo těleso

1928 Erich Schönhardt

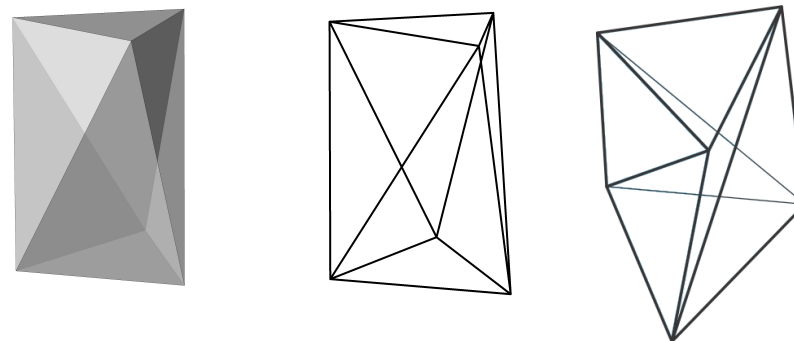


Objem čtyřstěnu — XII, 3–7

XII, 7 hranol lze rozložit na 3 jehlany stejného objemu
tyto jehlany však **nejsou shodné**



1928 Erich Schönhardt



Objem čtyřstěnu

Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta} \cdot v$ tj. třetina objemu hranolu

poprvé uvedl Démokritos dokázal Eudoxos

důkaz založen na **exhaustační metodě**:

Eukleidés, Základy **X**, 1:

dány dvě veličiny různé velikosti: větší (a) a menší (ϵ):

- od větší odečteme část větší než její polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina
- a od zbytku opět odečteme část větší než jeho polovina

a tak dále $\Rightarrow$ v některém kroku už zbude veličina menší než ϵ
(viz též Archimédův axiom)

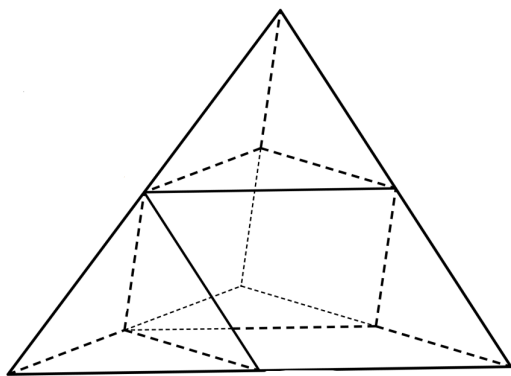
tj. od a odečteme veličinu $> a/2$, od zbytku odečteme více než jeho polovinu
a tak dále; po konečně mnoha krocích zbude veličina $< \epsilon$

Objem čtyřstěnu — XII, 3–7

XII, 3

Jehlan s trojúhelníkovou podstavou lze rozložit na:

- dva shodné jehlany (a podobné celému jehlanu)
- dva hranoly stejného objemu (větší než polovina celého jehlanu)



XII. kniha – další výsledky

XII, 2 poměr obsahů dvou **kruhů** = poměr čtverců jejich průměrů

XII, 10 kužel je třetinou **válce** s touž podstavou a výškou

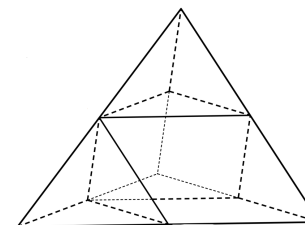
XII, 17 dvě soustředné **koule**; do větší vepsat pravidelný mnohostěn, který nemá s menší koulí žádný společný bod

XII, 18 poměr obsahů dvou **koulí** = poměr krychlí jejich průměrů

Objem čtyřstěnu — XII, 3–7

XII, 5 Poměr objemů trojbokých jehlanů, které mají stejnou výšku, je roven poměru obsahů jejich podstav.

důkaz založen na exhaustivní metodě

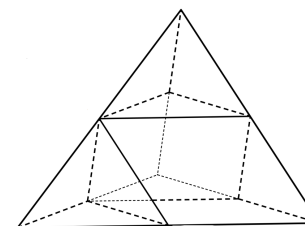


XII, 6 podstavou mnohoúhelník

XII, 7 hranol lze rozložit na 3 jehlany stejného objemu

Objem čtyřstěnu dnes

Exhaustivní metoda: $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$



$$V_1 = \frac{1}{8}S_v + \frac{1}{8}S_v = \frac{1}{4}S_v$$

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}S_v = \frac{1}{4^2}S_v$$

$$V_3 = 2^2 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{8}S_v = \frac{1}{4^3}S_v$$

$$V = \frac{1}{4}S_v + \frac{1}{4^2}S_v + \frac{1}{4^3}S_v + \dots = \frac{1}{4}S_v \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}S_v \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}S_v$$

Třetí Hilbertův problém

23 Hilbertových problémů

David Hilbert (1862 – 1943)

Druhý mezinárodní kongres matematiků, Paříž

8. srpen 1900

Sekce Historie a bibliografie M

Publikace 23 HP

David Hilbert (1862 – 1943)

[1900a] *Problèmes mathématiques*. l'Ens. Math. (1) 2, 349–355.

[1900b] *Mathematische Probleme*. Nachrichten Königlichem Gesellschaft Wissenschaften Göttingen, math.-physik. Klasse, 253–297.

[1901a] **Mathematische Probleme**. Arch. Math. Physik (3) 1, 44–63, 213–237.

[1901b] *Problèmes mathématiques*. Revue Gén. Sci. Pures Appl. 12, 168–174.

[1901a] vyšlo ještě 1902 francouzsky

[1902a] *Sur les problèmes futurs des mathématiques*. 58–114;

1902b. *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 8, 437–479.

Třetí Hilbertův problém

Nešlo by to bez exhaustivní metody?

Z oblasti základů geometrie bych chtěl jmenovat následující problém.

3. Rovnost objemů dvou čtyřštěnů se stejným obsahem základny a stejnou výškou.

Gauss vyjadřuje ve dvou dopisech Gerlingovi své politování nad tím, že jistá tvrzení stereometrie závisí na exhaustivní metodě, tj. v moderní terminologii na axiomu spojitosti (nebo na Archimédovu axiomu). Gauss jmenovitě uvádí Eukleidovo tvrzení, že trojboké jehlany se stejnou výškou jsou ve stejném poměru jako jejich podstavy. Analogická úloha v rovině byla už zcela vyřešena; dále se podařilo Gerlingovi dokázat rovnost objemů dvou symetrických mnohostěnů skrze jejich rozklad na shodné části. Přesto se mi jeví důkaz výše zmíněného Eukleidova tvrzení tímto způsobem jako nemožný a jednalo by se tedy o striktní důkaz nemožnosti. Takový by byl proveden, jakmile se podaří – uvést dva čtyřštěny se stejným obsahem podstavy a se stejnou výškou, které nelze žádným způsobem rozložit na shodné čtyřštěny a které nelze ani připojením shodných čtyřštěnů doplnit na takové mnohostěny, pro něž je rozklad ve shodné čtyřštěny možný.

Gaussův dopis Christianu Gerlingovi

GAUSS AN GERLING. Göttingen, 8. April 1844.

..... Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als eine wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höhern Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstrieren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben.

Christian Gerling

důkaz pro symetrické jehľany a mnohostěny

rozklad trojbokého jehľanu na dvanáct zrcadlově souměrných čtyřstěnů

Je-li každý z jednotlivých dílčích čtyřstěnů zrcadlově symetrický, pak ke stejnému rozkladu nezbytně vede i rozklad trojbokého jehľanu, který je zrcadlově souměrný s původním.

Libovolný jehľan lze tedy rozložit na stejné dílčí mnohostěny jako jehľan s ním zrcadlově souměrný.

Symetrické jehľany mají proto stejný objem.

Jelikož lze každý mnohostěn rozložit na trojboké jehľany, platí rovnost objemů i pro obecné navzájem zrcadlově souměrné mnohostěny.

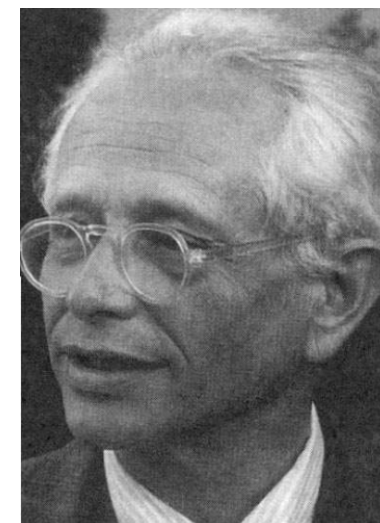
Gaussův dopis Christianu Gerlingovi

GAUSS AN GERLING. Göttingen, 17. April 1844.

Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloss symmetrischer, nicht zugleich congruenter, Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, dass man sagt,

- 1) dass man auf diejenigen Pyramiden aufmerksam macht, deren symmetrische Gegenstücke mit ihnen zugleich congruent sind, welches nemlich diejenigen sind, an denen zwei Seitenflächen zu einer dritten normal sind und in ihren Durchschnitten mit dieser gleiche Kanten geben, und
- 2) dass man nachweist, wie jede Pyramide in 12 Pyramiden von der eben bezeichneten Art zerlegt werden kann.

Max Dehn (1878–1952)



Žák Hilbertův

Doktorát 1900

1922 Frankfurt:
Seminář historie M

1940/41 USA

1945 Black Mountain

Řešení

Dehn M.: *Über raumgleiche Polyeder*. Nachrichten Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900, 345–354.

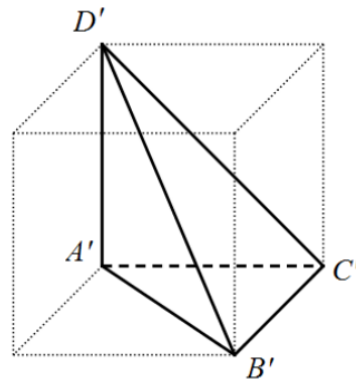
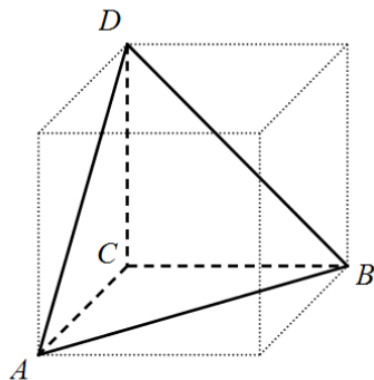
Odvození nutné podmínky ekvidekomposability, mnohostěny s různými Dehnovými invarianty (např. krychle a prav. 4stěn).

Dehn M.: *Über den Rauminhalt*. Math. Ann. 55(1902), 465–478.

Zde dokázal, že ekvidekomposabilní mnohostěny musí mít stejný Dehnův invariant.

Kagan, V. F.: *Über die Transformation der Polyeder*. Math. Ann. 57(1903), 421–424.

M. Dehn: řešení



M. Dehn a D. Hilbert

Výroční zpráva královské vědecké společnosti v Göttingen (1900)

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1900. Heft 3.

Inhalt.

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (IX)	S. 241
Eduard Riecke, Ueber das Verhältniss der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und Electricität	„ 250
D. Hilbert, Mathematische Probleme	„ 258
Alfred Loewy, Ueber die Transformation einer Hermiteschen Form von nicht verschwindender Determinante in sich	„ 298
Robert Fricke, Die automorphen Elementarformen	„ 303
Robert Fricke, Die Ritter'sche Primform auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche	„ 314
A. Voss, Ueber die Principe von Hamilton und Maupertuis	„ 323
W. Nernst und H. Reynolds, Ueber die Leitfähigkeit fester Mischungen bei hohen Temperaturen	„ 328
W. Voigt, Ueber die Influenz ferromagnetischer Krystalle, insbesondere über die P. Weiss'schen Beobachtungen am Magnetit	„ 381
M. Dehn, Ueber raumgleiche Polyeder	„ 345

Göttingen,

Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung

Lüder Horstmann.

Dehnovy invarianty (H. Hadwiger)

Invariantní vzhledem k rozkladu (i shodnosti):

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2)$$

Pak už snadno rozhodneme, zda dva čtyřstěny řeší 3HP:

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} f(\alpha_e) \cdot |e|$$

až na rac. násobek π – dihedrální fce

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{Q}:$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(q \cdot a) = q \cdot f(a), \quad f(\pi) = 0$$

Dehnovy invarianty – příklad

Jednotková krychle K

$$\alpha_e = \pi/2 \quad |e| = 1$$

tudíž

$$D_f(K) = 12 \cdot f(\alpha_e) \cdot |e| = 12 \cdot f(\pi/2) \cdot 1 = 6 \cdot f(\pi) = 0$$

Dehnovy invarianty

Dehn dospěl k nutné podmínce ekvidekomposability mnohostěňů:

$$n'_1 \pi'_1 + n'_2 \pi'_2 + \dots + n'_k \pi'_k + n' \pi = n''_1 \pi''_1 + n''_2 \pi''_2 + \dots + n''_k \pi''_k + n'' \pi$$

odvodil již R. Bricard 1896 (Bricardova podmínka)

Koeficienty celočíselné, řešením soustavy homog. lin. rovnic

V. Kagan si všiml: místo koeficientů mohou vystupovat přímo délky hran

Dehnovy invarianty

Über den Rauminhalt, 1902

Dehn postupoval analogicky jako u mnohoúhelníků:

součet vnitřních úhlů + $n\pi$ = součet vn. úhlů dílčích mnohoúh.

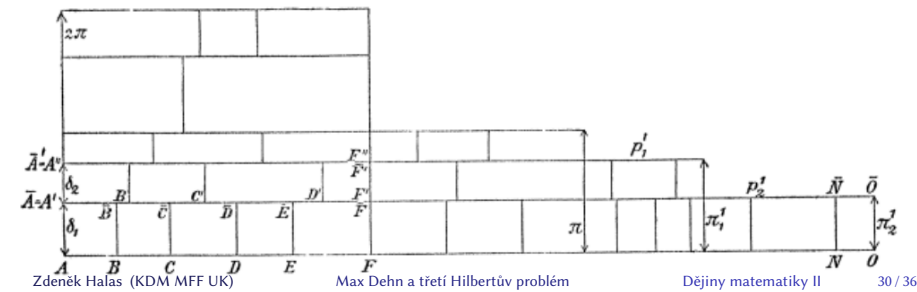
Nutná podmínka ekvidekomposability P' a P'' :

$$\text{součet vnitřních úhlů } P' + n'\pi = \text{součet vnitřních úhlů } P'' + n''\pi$$

tj.

$$\text{součet vnitřních úhlů } P' = \text{součet vnitřních úhlů } P'' \pmod{\pi}$$

3D: tzv. dělicí plochy (převedení 3D problému do 2D)



Zobecnění Dehnových výsledků

DI umožňují: dva mnohostěny **nemají** žádný společný rozklad

Sydler J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions*. Comment. Math. Helv. 40(1965), 43–80.

Mají $\Leftrightarrow$ jsou si Dehnovy invarianty rovny $\forall f$

$n > 3$ – Hugo Hadwiger, 1954

Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929)

Danuta Ciesielska a Krzysztof Ciesielski

1879 doktorát na univerzitě ve Lvově

pokračoval ve studiích ve Vídni

1880–1909 vyučoval M a F na zemědělské SŠ v Czernichówě (nedaleko Krakova)

1881 habilitace Jagellonská univerzita v Krakově,

zde vyučoval matematickou fyziku,

1897 pro něho zřídili stolicí Dějin exaktních věd, profesorem byl až do své smrti

Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929)

řešení

1. zkoumá řezy čtyřstěnu rovinou (3úh. a 4úh.),
užívá Eulerovu větu pro mnohostěny

2. podmínky řešitelnosti:
hledá invariant ekvidekomposability, našel

$$2n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 9n$$

podmínek (n je počet rovin) existence rozkladu závisí na existenci řešení
jistých diofantických rovnic

3. Omezující podmínky: jen ve speciálních případech

Dodatek: převedení na zkoumání polynomiální funkce (nehotové)

Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929)

Danuta Ciesielska a Krzysztof Ciesielski

1872 založena Akademie věd a umění v Krakově

1882, 12. 6.: Akademie vyhlásila soutěž

jedna ze dvou úloh (za 500 Franků):

Jsou-li dány libovolné dva čtyřstěny stejného objemu, rozdělte jeden z nich rovinami, je-li to možné, na nejmenší možný počet částí, které mohou být přerovnány tak, aby vytvořily druhý čtyřstěn.

Pokud to není možné provést, nebo je to možno provést za jistých omezujících podmínek, tak dokažte, že to není možné, nebo uveďte přesně tyto podmínky.

přišla 2 řešení, jedno z nich správné

Literatura

Boltyanskii V. G.: *Tret'ya problema Gil'berta*. Nauka, Moskva, 1977.

Bricard R.: *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*. Nouvelles annales de mathématiques, III, 15(1896), 331–334.

Dehn M.: *Über raumgleiche Polyeder*. Nachrichten Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900, 345–354.

Dehn M.: *Über den Rauminhalt*. Math. Ann. 55(1902), 465–478.

Carl Friedrich Gauss Werke. VIII. Teubner, Leipzig, 1900.

Hadwiger H.: *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder*. Mathematische Annalen 127(1954), 170–174.

Hilbert D.: *Mathematische Probleme*. Archiv der Mathematik und Physik III 1(1901), 44–63, 213–237.

Kagan, V. F.: *Über die Transformation der Polyeder*. Math. Ann. 57(1903), 421–424.

Sydler J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions*. Comment. Math. Helv. 40(1965), 43–80.