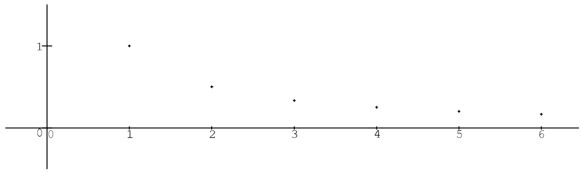


OBR. 1.3

1.4. Čísla, množiny čísel

V tomto oddílu stručně připomeneme užívané druhy čísel a jejich vlastnosti.

Přirozená čísla – $\mathbb{N}$

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Vznikla jako vyjádření počtu prvků množiny resp. jako vyjádření pořadí odpočítávaných věcí.

Můžeme je srovnávat podle velikosti, sčítat a násobit.

Je jich nekonečně mnoho – ke každému existuje o jedničku větší, ale ne zase příliš mnoho. Platí totiž následující tzv. *axiom indukce*:

Jestliže pro nějakou množinu $M \subset \mathbb{N}$ je

1) $1 \in M$,
2) s každým $n \in M$ je také $(n+1) \in M$,

pak je $M = \mathbb{N}$.

Celá čísla – $\mathbb{Z}$

$$\ldots,\ -n,\ -(n-1),\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n,\ \ldots$$

(přidali jsme záporná celá čísla a nulu). Můžeme navíc bez omezení odečítat.

Racionální čísla – $\mathbb{Q}$

jsou třídy ekvivalentních zlomků

$$\frac{p}{q},\ q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z}$$

(dva zlomky p/q a $\tilde{p}/\tilde{q}$ nazýváme ekvivalentní, je-li $p\tilde{q} = \tilde{p}q$).

Můžeme navíc bez omezení dělit (nenulovým číslem).

Na rozdíl od množiny celých čísel mezi každými dvěma racionálními čísly $q_1 < q_2$ leží další racionální číslo (a tedy nekonečně mnoho takových čísel). Kdybychom si racionální čísla znázorňovali na přímce, pak by ji „hustě" zaplnila, ale ne zcela vyplnila. Kdybychom například z počátku nanesli přeponu pravoúhlého trojúhelníka s rameny rovnými jedné, pak by její koncový bod nebyl označen žádným racionálním číslem – viz následující poznámka.

Poznmka 1.11. Neexistuje racionální číslo p/q s vlastností $(p/q)^2 = 2$: Kdyby existovalo, můžeme předpokládat, že p a q jsou kladná a nesoudělná.Pak ale $p^2 = 2q^2$, tj, p^2 je sudé. Pak ale i p musí být sudé: $p = 2k$. Potom ale je $(2k)^2 = 2q^2$, $2k^2 = q^2$, tj. q musí být také sudé, což je spor s předpokládanou nesoudělností $p,\ q$.

Aby se odstranily tyto nedostatky, byla zavedena tzv. reálná čísla.

Reálná čísla – $\mathbb{R}$.

Jedním z možných způsobů jak je zavést jsou tzv. nekonečné desetinné rozvoje

$$\pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots\ ,$$

kde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $i \in \mathbb{N}$ s tím, že nepřipouštíme periodu 9 a připouštíme periodu 0 (tzv. ukončené rozvoje; je například 1,00 ... 0 ... totéž, jako 0,99 ... 9 ...). Racionálním číslům pak odpovídají rozvoje, které mají periodu (speciálně ukončené rozvoje). Pro daný zlomek p/q se odpovídající desetinný rozvoj dostane dělením se zbytkem čísla p číslem q. Příkladem neperiodického rozvoje může být například rozvoj $0, 101001000\dots$ (počet nul za každou jedničkou se o jednotku zvětšuje).

V množině reálných čísel můžeme sčítat, odečítat, násobit, dělit (kromě nulou) bez omezení, srovnávat podle velikosti, přičemž opět platí, že mezi každými dvěma čísly $r_1 < r_2$ leží nekonečně mnoho dalších reálných čísel (dokonce i nekonečně mnoho racionálních čísel). Přitom každé reálné číslo můžeme s libovolnou přesností přiblížit racionálními čísly: je-li $r =$

$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ reálné číslo, pak racionální číslo $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 00 \dots 0 \dots$ se od r liší nejvýše o $1/10^n$.

Abychom vyjádřili vlastnost, že tato čísla už zaplní celou přímku (a také i například to, že můžeme bez omezení odmocňovat nezáporná čísla), zaveďme nejdříve některé pojmy, které se nám budou hodit i v dalším.

Definice 1.17. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zhora* (*omezená zdola*), jestliže existuje takové $K_1 \in \mathbb{R}$ ($K_2 \in \mathbb{R}$), že $x \leq K_1$ ($x \geq K_2$) pro všechna $x \in M$. Číslo K_1 (K_2) s touto vlastností pak nazýváme *horní (dolní) hranicí* množiny M. Je-li M omezená zhora i zdola, pak říkáme, že je *omezená*.

Definice 1.18. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má *největší prvek (= maximum)* (*nejmenší prvek (= minimum)*), jestliže existuje $x_0 \in M$ takové, že $x_0 \geq x$ ($x_0 \leq x$) pro každé $x \in M$. Takové x_0 pak nazýváme *největším (nejmenším)* prvkem množiny M.

Poznámka 1.12. Zřejmě každá konečná množina má nejmenší i největší prvek. Má-li M maximum (minimum), pak je omezená zhora (zdola). Opačné implikace obecně neplatí: $M = \{y;\ y < 2\}$ je omezená zhora, ale nemá maximum.

Definice 1.19. Řekneme, že číslo G je *supremem (= nejmenší horní hranicí)* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1) $x \leq G$ pro každé $x \in M$,
2) pro každé $\tilde{G} < G$ existuje $x_{\tilde{G}} \in M$, že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$.

Řekneme, že číslo g je *infimem (= největší dolní hranicí)* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1) $x \geq g$ pro každé $x \in M$,
2) pro každé $\tilde{g} > g$ existuje $x_{\tilde{g}} \in M$, že $x_{\tilde{g}} < \tilde{g}$.

Poznámka 1.13. 1) značí, že G je horní hranice, 2) značí, že žádné $\tilde{G} < G$ není horní hranicí. Analogicky pro infimum.

Poznámka 1.14. Má-li M maximum, pak je supremum rovno tomuto maximu. Obecně supremum nemusí být maximem – viz příklad z poznámky 1.12.

Vlastnost „neděravosti" $\mathbb{R}$ vyjadřuje následující věta:

VĚTA 1.7. *Každá neprázdná*[1] *zhora (zdola) omezená množina* $M \subset \mathbb{R}$ *má v* $\mathbb{R}$ *supremum (infimum).*

POZNÁMKA 1.15. Pro $\mathbb{Q}$ taková věta neplatí, například množina $M = \{y;\ y \in \mathbb{Q},\ y^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ nemá v $\mathbb{Q}$ supremum ($\sqrt{2}$, což je její supremum v $\mathbb{R}$, do $\mathbb{Q}$ nepatří).

PODSTATA DKAZU. Nechť omezená zhora množina M obsahuje pouze kladná čísla. Potom je množina všech $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ u všech prvků z M omezená. Nechť $\tilde{a}_0$ je její maximum. Uvážíme-li nyní podmožinu $M_0 \subset M$ všech těch čísel z M, pro něž je $a_0 = \tilde{a}_0$, určíme $\tilde{a}_1$ jako největší z čísel $\{0,1, \dots ,9\}$ takových, že v M_0 existuje číslo, začínající $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$. Analogicky postupujeme dále, až sestrojíme číslo $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1\tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_n \dots$, o němž se dokáže, že je supremem M.

V množině reálných čísel platí (viz například [Ši]) také tzv. *Archimedův princip*: pro $\alpha > 0$, β libovolné existuje n celé, že $(n-1)\alpha \le \beta < n\alpha$.

Pro každé reálné číslo $r \neq 0$ definujeme jeho *absolutní hodnotu* $|r|$ jako kladné z čísel r a $-r$, $|0| \overset{def}{=} 0$. Připomeňme, že pro takto definovanou absolutní hodnotu platí vztahy:

1) $|ab| = |a| \,.\, |b|$,
2) $|a+b| \le |a| + |b|$ (trojúhelníková nerovnost),
3) $||a| - |b|| \le |a-b|$,
4) $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$, $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.

Komplexní čísla – $\mathbb{C}$

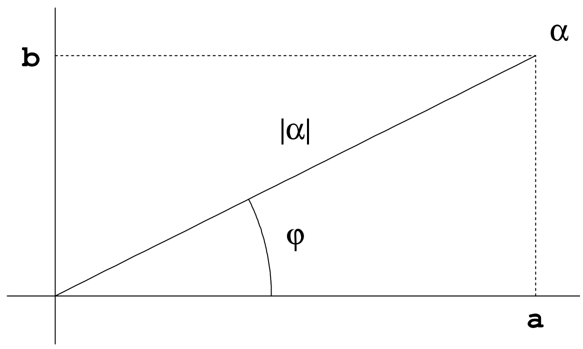
Důvodem pro jejich zavedení bylo přání umět odmocňovat i záporná čísla, obecněji přání, aby každý mnohočlen stupně alespoň 1 měl alespoň jeden kořen.

Komplexní čísla se zavádějí jako množina uspořádaných dvojic (a,b) reálných čísel. Rovnost dvou komplexních čísel (a,b) a (c,d) se definuje předpisem $a = c$ a zároveň $b = d$. Sčítání a násobení se definuje následovně: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$. Tyto operace mají stejné vlastnosti jako v množině reálných čísel. Reálným číslům odpovídají komplexní čísla tvaru $(a,0)$. Číslo $(0,1)$ se označuje i (komplexní jednotka) a platí pro něj $i^2 = -1$. Vzhledem k těmto definicím můžeme každé komplexní číslo $\alpha = (a,b)$ zapsat ve tvaru $\alpha = a + ib$, přičemž čísla a a b se nazývají *reálnou* a *imaginární* částí čísla α a značí

---

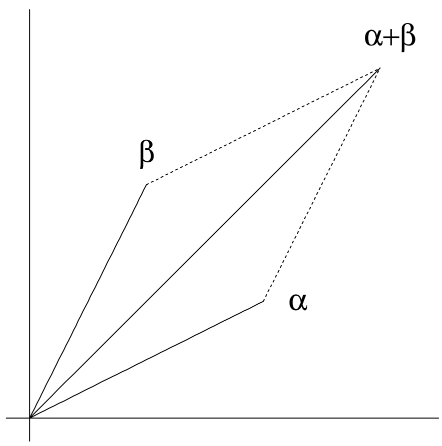
[1] tj. která má aspoň jeden prvek.

se $\operatorname{Re}\alpha$ a $\operatorname{Im}\alpha$. *Absolutní hodnotou* $|\alpha|$ čísla $\alpha = a + ib$ nazýváme číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Každé komplexní číslo pak můžeme napsat v tzv. *goniometrickém tvaru* $\alpha = a+ib = |\alpha|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde φ (tzv. *argument* komplexního čísla) je takové číslo, pro něž je $\cos\varphi = a/\,|\alpha|$, $\sin\varphi = b/\,|\alpha|$. Komplexní čísla si znázorňujeme jako body roviny (viz obr. 1.4).

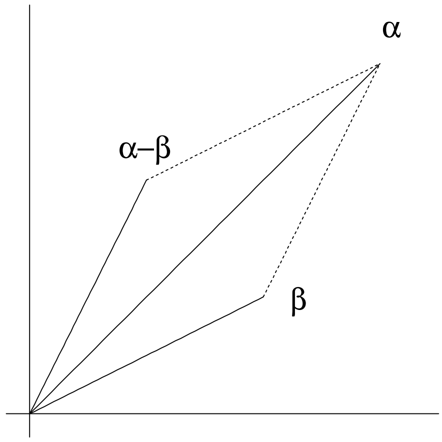


Obr. 1.4

Na tomto obrázku je také vidět geometrický význam zavedených pojmů. Na obrázku 1.5. je vidět, jak si znázorníme součet dvou komplexních čísel, na obrázku 1.6. je vidět význam rozdílu $\beta - \alpha$ dvou komplexních čísel a také význam absolutní hodnoty tohoto rozdílu jako vzdálenosti odpovídajících bodů α a β.



Obr. 1.5



Obr. 1.6

Definice 1.20. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je *omezená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, že $|x| \leq K$ pro všechny $x \in M$.

V množině $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně alespoň 1 alespoň jeden kořen. Na druhé straně v $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání. Lze jen srovnávat absolutní hodnoty komplexních čísel (neboť to jsou čísla reálná).

Připomeňme nakonec následující vztahy, platné pro libovolná dvě komplexní čísla α, β:

$$|\alpha.\beta| = |\alpha| \, . \, |\beta| \, , \; |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \, , \; |\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta|| \, .$$