Řetězové zlomky

1. Matematickou indukcí dokažte, že pro čitatele a jmenovatele konvergentů $\dfrac{A_n}{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, řetězového zlomku $[q_1; q_2, q_3, \dots]$ platí:
   a) $A_n \cdot B_{n-1} - B_n \cdot A_{n-1} = (-1)^n\,, \quad n > 1,$
   b) $A_n = q_n A_{n-1} + A_{n-2}\,, \quad n > 2,$
   c) $B_n = q_n B_{n-1} + B_{n-2}\,, \quad n > 2\,.$

2. Najděte racionální číslo, jehož řetězový zlomek je $[1; 1, 4, 4, 1, 2]$. Dále vypočtěte všechny konvergenty tohoto řetězového zlomku.

3. Bez použití kalkulátoru najděte řetězový zlomek:
   - racionálního čísla $\dfrac{55}{34}$ a vypočtěte všechny konvergenty,
   - čísla $\sqrt{3}$ a vypočtěte prvních 5 konvergentů,
   - čísla $\sqrt{7}$ a vypočtěte prvních 6 konvergentů.

4. Řetězový zlomek iracionálního čísla α je nekonečný, tj. $\alpha = [q_1; q_2, q_3, q_4, q_5, \dots]$. S pomocí kalkulátoru lze jeho články q_i hledat velmi snadno, stačí stále opakovat tutéž sekvenci:

   a) odečtu celou část, kterou zaznamenám (to je totiž q_i),
   b) ze zbylého čísla (menšího než jedna) vypočtu převrácenou hodnotu.

   Vypočtěte prvních 10 článků řetězového zlomku čísla e.

```python
# Retězový zlomek q zadaného iracionálního čísla x
# prvních n článků

import math

x = math.e
n = 4

print(x)

q = []

for k in range(n):
    q.append( int(x) )
    x = 1 / ( x - int(x) )

print(q)
```

Výstup programu:

```
2.718281828459045
[2, 1, 2, 1]
```

5. Vypočtěte následující součin matic.

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_4 \end{pmatrix}$$

6. Pozorujme řetězové zlomky odmocnin některých čísel:

$\sqrt{1} = [1]$ $\quad$ $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ $\quad$ $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$

$\sqrt{4} = [2]$ $\quad$ $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$ $\quad$ $\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$

$\sqrt{9} = [3]$ $\quad$ $\sqrt{10} = [3; \overline{6}]$ $\quad$ $\sqrt{11} = [3; \overline{3, 6}]$

$\sqrt{16} = [4]$ $\quad$ $\sqrt{17} = [4; \overline{8}]$ $\quad$ $\sqrt{18} = [4; \overline{4, 8}]$

$\sqrt{25} = [5]$ $\quad$ $\sqrt{26} = [5; \overline{10}]$ $\quad$ $\sqrt{27} = [5; \overline{5, 10}]$

$\sqrt{36} = [6]$ $\quad$ $\sqrt{37} = [6; \overline{12}]$ $\quad$ $\sqrt{38} = [6; \overline{6, 12}]$

$\sqrt{49} = [7]$ $\quad$ $\sqrt{50} = [7; \overline{14}]$ $\quad$ $\sqrt{51} = [7; \overline{7, 14}]$

Přímým výpočtem ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sqrt{n^2 + 1} = [n; \overline{2n}] \qquad \sqrt{n^2 + 2} = [n; \overline{n, 2n}]$$