terval $(-\infty, 0\rangle$. Protože je (f je funkce z příkladu 3.30.)

$$\left|(\tilde{g})^{-1}(y)\right|^{2k} = ((\tilde{g})^{-1}(y))^{2k} = y = (f^{-1}(y))^{2k} = \left|f^{-1}(y)\right|^{2k},$$

dostáváme $\left|(\tilde{g})^{-1}(y)\right| = \left|f^{-1}(y)\right|$, a tedy $(\tilde{g})^{-1}$ a f^{-1} se liší právě znaménkem, tj. $(\tilde{g})^{-1}(y) = -\sqrt[2k]{y}$, $y \in \langle 0, +\infty)$.

Poznámka 3.21. Z příkladů 3.29. a 3.30. je vidět, že ke každému nezápornému číslu y a ke každému přirozenému číslu n existuje právě jedno nezáporné číslo $\varphi(y)$ takové, že $(\varphi(y))^n = y$. Toto číslo je dáno jako hodnota v bodě y příslušné inverzní funkce zkonstruované v těchto příkladech, tj, $\sqrt[n]{y}$.

Dále je z těchto příkladů vidět, že pro n liché existuje právě jedna n-tá odmocnina pro každé reálné číslo. Pro n sudé a nezáporné číslo y existují právě dvě reálná čísla taková, která po umocnění na n-tou dají y: $\sqrt[n]{y}$ a $-\sqrt[n]{y}$.

Příklad 3.31. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. f je rostoucí, je $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2\mp} \operatorname{tg} x = \pm\infty$. Inverzní k ní funkce je definována na $\mathbb{R}$, je tam spojitá a rostoucí a její limity v $\pm\infty$ jsou rovny $\pm\pi/2$. Označuje se arctg.

3.11. Obecná mocnina. Funkce a^x, x^α, $\log_a x$

Definice 3.18. Pro $x > 0$ definujeme

$$\begin{aligned}
x^n &= \underbrace{x.\ldots.x}_{n \text{ krát}},\ n \in \mathbb{N},\\
x^0 &= 1\\
x^{1/n} &= \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}\\
x^{n/m} &= \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{(x^n)},\ m, n \in \mathbb{N}\\
x^{-n/m} &= \frac{1}{\left(\sqrt[m]{x}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[m]{(x^n)}},\ m, n \in \mathbb{N}\\
x^\alpha &= \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha_n \in \mathbb{Q}, \alpha_n \to \alpha\\
0^\alpha &= 0\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0
\end{aligned}$$

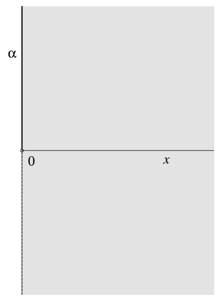
Ve výrazu x^α se x nazývá *základem* nebo *mocněncem* a α *exponentem* nebo *mocnitelem* .

Poznámka 2.22. Ke korektnosti definice je třeba dokázat:

1) Rovnost dvou výrazů ve druhém řádku.
2) Rovnost $x^{n/m} = x^{p/q}$ pro $m/n = p/q$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $n/m = p/q$.
3) Nezávislost x^α na posloupnosti α_n, splňující $\alpha_n \to \alpha$.

Cvičení 3.13. Dokažte 1) a 2) z této poznámky.

Na obrázku 3.8. je ukázána množina x a α, pro která je tato mocnina definována.



Obr. 3.8

Pro takto definovanou mocninu platí následující věta:

Věta 3.26. *Pro $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ platí*

$$\begin{aligned}
x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta},\\
x^\alpha y^\alpha &= = (xy)^\alpha,\\
\frac{x^\alpha}{y^\alpha} &= \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha,\\
(x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta},\\
x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha},\\
x^\alpha < y^\alpha &\text{ pro } x < y,\ \alpha > 0,\\
x^\alpha > y^\alpha &\text{ pro } x < y,\ \alpha < 0,\\
x^\alpha > x^\beta &\text{ pro } \alpha > \beta,\ x > 1,\\
x^\alpha < x^\beta &\text{ pro } \alpha > \beta,\ x < 1,
\end{aligned}$$

přičemž kromě těch, kde je x, y ve jmenovateli, platí i pro x, y rovné nule a $\alpha > 0$.

Poznámka 3.23. Dá se definovat mocnina i pro $x < 0$ a některé exponenty α se zachováním rovností z věty 3.26.

Definice 3.19. I. *Exponenciální* funkcí o základu $a > 0$ nazýváme funkci

$$f_a(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

II. *Mocninnou* funkcí s exponentem $\alpha \in \mathbb{R}$ (α-tou mocninou) nazýváme funkci

$$g_\alpha(x) = x^\alpha \text{ pro } \begin{cases} x \geq 0, & \alpha > 0,\\ x > 0, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Poznámka 3.24. Tato definice mocninné funkce byla takto vyslovena proto, aby byla stručná. Například pro celé exponenty se užívá následujících rozšíření těchto funkcí na $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$):

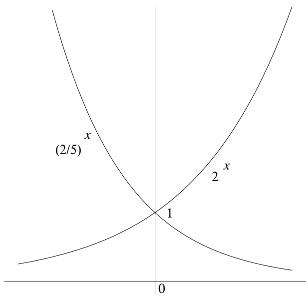
$$\begin{aligned}
x^n &= \underbrace{x.\ldots.x}_{n \text{ krát}},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\\
x^0 &= 1, \qquad x \in \mathbb{R},\\
x^{-n} &= \frac{1}{x^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Platí

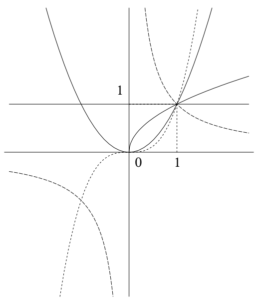
Věta 3.27. *Všechny exponenciální i mocninné funkce jsou na svých definičních oborech spojité a platí*

1) a^x *je rostoucí (klesající) na* $\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0\ (+\infty)$ *pro* $a > 1$ *(*$a < 1$*)*,
$a^x > 0$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$ *pro každé* $a > 0$.
2) x^α *je rostoucí (klesající) na* $\langle 0, +\infty)$ *(*$(0, +\infty)$*)*,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty\ (0)$, $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha = 0\ (+\infty)$ *pro* $\alpha > 0$ *(*$\alpha < 0$*)*,
$x^\alpha > 0$ *pro každé* α *a* $x > 0$, $1^\alpha = 1$ *pro každé* α.

Grafy těchto funkcí jsou na obrázcích 3.9. 3.10.



Obr. 3.9



Obr. 3.10

Definice 3.20. *Logaritmickou* funkcí o základu $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ nazýváme funkci inverzní k funkci a^x. Je definována na $(0,+\infty)$ a označujeme ji $\log_a x$.

Vlastnosti logaritmické funkce shrnuje

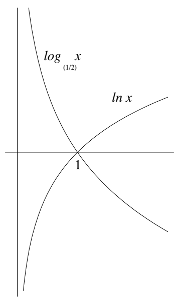
Věta 3.28. *Pro $a > 1$ ($a < 1$) je funkce $\log_a x$ rostoucí (klesající) na $(0,+\infty)$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\ (-\infty),\ \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty\ (+\infty),$$
$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1 \text{ pro každé } a.$$

Dále platí

$$x = a^{\log_a x},\ x^\alpha = a^{\alpha \log_a x},\ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,$$
$$\log_b x = \log_b(a^{\log_a x}) = \log_a x \,.\, \log_b a,$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

V praxi se nejčastěji používaly tzv. *dekadické* logaritmy o základu 10 – označují se log nebo *přirozené* logaritmy o základu e – označení ln. Grafy logaritmických funkcí jsou na obrázku 3.11.



Obr. 3.11

Logaritmů lze úspěšně použít k výpočtu limit funkcí tvaru $[v(x)]^{w(x)}$, kde $v > 0$ a w jsou funkce. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x\to a} w(x)\ln(v(x)) =$