Hilbertova axiomatika

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899

tři primitivní pojmy:

- bod
- přímka
- rovina

tři primitivní relace:

- ležet mezi (3 body)
- ležet na (bod a přímka, bod a rovina, přímka a rovina)
- shodnost (2 úsečky, 2 úhly)

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899

5 skupin axiomů: (21)

I. incidence (8)

II. uspořádání (4)

III. shodnost (6)

IV. rovnoběžky (1)

V. spojitost (2)

IV,1 (Eukleidův axiom): Buď dána přímka a bod na ní neležící. Pak v rovině existuje nejvýše 1 přímka procházející tímto bodem a neprotínající zadanou přímku.

V,1 Archimédův axiom ($\exists\, n \in \mathbb{N};\ n \cdot AB$ přesahuje úsečku AC)

V,2 Axiom úplnosti (množinu všech bodů na přímce už nelze dále konzistentně rozšířit)

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899

I. incidence

1. $\forall A, B$ $\exists$ přímka jimi procházející
2. tato přímka je nejvýše 1
3. na přímce leží alespoň 2 body
4. $\forall A, B, C$ neležící v přímce $\exists$ rovina jimi procházející
5. tato rovina je nejvýše 1
6. leží-li v rovině 2 body přímky p, leží v ní všechny body přímky p
7. mají-li 2 roviny společný bod, pak mají společný ještě jiný bod
8. existují alespoň 4 body neležící v rovině

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899

II. uspořádání

1. B leží mezi A a C, pak také leží mezi C a A
   a $\exists\, p$ obsahující A, B, C
2. A, C dva body na přímce, pak $\exists B$ ležící na p mezi nimi
3. ze 3 bodů na přímce není více než 1, který leží mezi zbylými dvěma
4. Paschův axiom: 3 body, p jimi neprocházející;
   protíná-li p úsečku AB, pak také protíná buď AC, nebo BC

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899

III. shodnost

1. $A, B \in p$, $A' \in p'$ (p' ne nutně různá od p)
   pak $\exists B' \in p'; \quad A'B' \cong AB \quad$ (zřejmě $AB \cong AB$)
2. $AB \cong A'B' \quad \wedge \quad AB \cong A''B''$, pak $\quad A'B' \cong A''B''$
3. AB a BC ležící na 1 přímce mají společný pouze bod B
   podobně $A'B'$ a $B'C'$ (ne nutně na jiné přímce)
   potom $AB \cong A'B' \quad \wedge \quad BC \cong B'C'$, pak $\quad AC \cong A'C'$
4. je-li dána polopřímka a úhel α, pak $\exists!$ polopřímka utvářející úhel shodný s α (a s danou orientací)
5. úhel $\alpha \cong \alpha' \quad \wedge \quad \alpha \cong \alpha''$, pak $\quad \alpha' \cong \alpha''$
6. sus, pak mají oba trojúhelníky zbylé úhly shodné