

Obyčejné diferenciální rovnice

Nejzákladnější aplikace

Zdeněk Halas

KDM MFF UK, 2011

Aplikace matem. pro učitele

Základní vztahy z mechaniky

Elektrické obvody

Radiouhlíková metoda

Základní vztahy z mechaniky

Derivace – fyzikální význam

Pohyb rovnoměrný – je pohyb bodu s konstantní rychlostí

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{neboli} \quad s = vt.$$

Dráha s , kterou těleso urazí, je tedy číselně rovna obsahu obdélníka o stranách v a t .

V případě pohybu nerovnoměrného lze ukázat analogický vztah: dráha, kterou těleso urazí, je číselně rovna obsahu plochy pod křivkou $v = v(t)$, tj.

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

Volný pád

Omezíme se zde na homogenní tíhové pole, které přibližně máme v blízkosti povrchu zemského. Galileo dokázal, že všechna tělesa se při volném pádu pohybují rovnoměrně zrychleně, tj. se stále stejným zrychlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Jelikož je mezi zrychlením a rychlostí analogický vztah, jako mezi rychlostí a dráhou, máme

$$s''(t) = g.$$

Uvažujeme-li pád z klidu, tj. $s(0) = 0$ a $v(0) = 0$, dostaneme prostou integrací

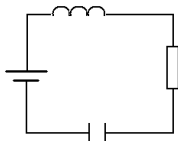
$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Podobně lze pomocí derivování a integrování snadno odvodit mnoho dalších vztahů z mechaniky.

Elektrické obvody

Elektrické obvody

Uvažujme tento elektrický obvod:



Druhý Kirchhoffův zákon říká: algebraický součet všech napětí v uzavřeném obvodu je roven nule.

Sestavme diferenciální rovnici, která bude popisovat proud $I(t)$ odebíraný ze zdroje.

Elektrické obvody

- ▶ baterie – ideální zdroj konstantního napětí
- ▶ cívka – „brání změně proudu“, tj. je-li indukčnost L henry, tak $U_C = L \frac{dI}{dt}$
- ▶ rezistor – o odporu R , $U_R = RI$ (Ohmův zákon)
- ▶ kondenzátor – s kapacitou C , uchovává náboj Q , tedy $U_K = \frac{Q}{C}$

Dále máme $I = \frac{dQ}{dt}$. Druhý Kirchhoffův zákon můžeme zapsat:

$$U_B - U_C - U_R - U_K = 0$$

$$U_B = L \cdot \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}.$$

Elektrické obvody

Dosazením $I = \frac{dQ}{dt}$ rovnice

$$U_B = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

dostaneme

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q = U_B,$$

což je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Pokud bychom do obvodu nezapojili kondenzátor, tak bychom dostali rovnici 1. řádu

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_B.$$

Radiouhlíková metoda

Rozpad radioaktivní látky

Základní diferenciální rovnice

Na základě pokusů: radioaktivní látky se rozkládají rychlostí, která je přímo úměrná množství nerozpadlé radioaktivní látky

$y(t)$ – množství radioaktivní látky v čase t

Potom

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

kde k je konstanta úměrnosti, tzv. *rozpadová konstanta*.

Rovnice se separovanými proměnnými; obecné řešení je

$$y(t) = C e^{kt}, \quad C > 0.$$

Rozpad radioaktivní látky

Určení konstant C a k

2 konstanty $\Rightarrow$ potřebujeme 2 podmínky:

množství radioaktivní látky v čase t_0 : y_0 tj. $y(t_0) = y_0$

množství radioaktivní látky v čase t_1 : y_1 tj. $y(t_1) = y_1$

Dostáváme

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)},$$

odkud také

$$y_0 = C e^{kt_0} \quad \text{a} \quad y_1 = C e^{kt_1}, \text{ neboli}$$

$$kt_0 = \ln y_0 - \ln C \quad \text{a} \quad kt_1 = \ln y_1 - \ln C, \text{ odkud pak}$$

$$k = \frac{\ln y_1 - \ln y_0}{t_1 - t_0}.$$

Jelikož $t_1 > t_0$ a $y_1 < y_0$, máme $k < 0$.

Rozpad radioaktivní látky

Poločas rozpadu

Často se rychlost rozpadu udává pomocí doby, za kterou se rozpadne polovina množství radioaktivní látky, tzv. *poločas rozpadu* T .

$$y_1 = \frac{1}{2}y_0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-\ln 2}{T},$$

kde čitatel vznikl dosazením: $\ln y_1 - \ln y_0 = \ln \frac{1}{2}y_0 - \ln y_0 = \ln \frac{1}{2}$.

Experimentálně se stanovilo:

Poločas rozpadu uranu 238 je 4,5 miliardy let.

Poločas rozpadu rubidia 87 je 60 miliard let.

Díky tomu mohou archeologové a geologové odhadnout data událostí, které se odehrály před mnoha miliony či miliardami let.

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda

Objevena na Kalifornské universitě v Berkeley roku 1940.

Na přelomu 40. a 50. let 20. století ji rozvinul americký chemik
Willard F. Libby (1908 – 1980).

Jejím základem je radioizotop uhlíku ^{14}C (tzv. radiouhlík), jehož poločas rozpadu určil na $T = 5\,568$ let. $\Rightarrow$ vhodnost pro datování událostí z dějin lidstva (do asi 50 000 let)

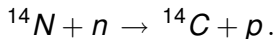
V roce 1960 obdržel W. F. Libby za tento objev Nobelovu cenu za chemii.

Přesnější hodnota poločasu byla později určena na 5 730 let (± 40 let).

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – proč funguje

Radioaktivní izotop uhlíku ^{14}C stále vzniká v horních vrstvách atmosféry díky kosmickému záření, které produkuje neutrony. Ty pak reagují s dusíkem ^{14}N a výsledkem je ^{14}C :



Oxidací ^{14}C vzniká oxid uhličitý CO_2 , který se z atmosféry dostává do rostlin a živočichů. Za jejich života probíhá látková výměna, a tak je koncentrace ^{14}C v tělech přibližně stejná, jako v atmosféře. Po smrti živočicha či rostliny látková výměna ustává a ^{14}C se začne rozpadat. Porovnáním koncentrací ^{14}C v odumřelém a žijícím těle lze tedy určit dobu, kdy daný živočich či rostlina odumřela.

Např.: stromy použité na stavbu, kosterní nálezy zvířat a člověka (stáří pohřebiště), zbytky u ohniště, ...

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – výpočty

Ohořelý kousek dřeva, který obsahuje oproti živému stromu poloviční množství izotopu ^{14}C , je starý asi 5 730 let.

Obsahuje-li pouze čtvrtinové množství izotopu ^{14}C , je jeho stáří asi 11 460 let.

Obecně pro množství nerozpadlého izotopu uhlíku ^{14}C platí

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)},$$

kde

$$k = \frac{-\ln 2}{T} = \frac{-\ln 2}{5730} = -0,0001209681.$$

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – rychlost rozpadu

Rychlost rozpadu $r(t)$ získáme derivací množství nerozpadlé látky $y(t)$ podle času, tedy derivací vztahu

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Dostaneme

$$y'(t) = r(t) = k y_0 e^{k(t-t_0)},$$

odkud pro $t = t_0$ obdržíme rychlost rozpadu v čase t_0 :

$$r(t_0) = k y_0.$$

Poměr rychlosti rozpadu v čase t a čase t_0 je tedy

$$\frac{r(t)}{r(t_0)} = e^{k(t-t_0)}.$$

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – rychlost rozpadu

Z rovnice $\frac{r(t)}{r(t_0)} = e^{k(t-t_0)}$ vyjádříme dobu $t - t_0$, která uplynula od odumření organismu:

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{r(t)}{r(t_0)}.$$

Předpokládáme, že co se týče rychlosti rozpadu izotopu ^{14}C , tak probíhá pro každý živý organismus vždy stejně – dnes i v minulosti.

Jelikož je $k = \frac{-\ln 2}{5730} = -0,000121$ záporné a velmi malé, upravíme vztah pro výpočet takto:

$$t - t_0 = \frac{5730}{\ln 2} \cdot \ln \frac{r(t_0)}{r(t)} = 8266,6426 \cdot \ln \frac{r(t_0)}{r(t)}.$$

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – jeskyně Lascaux

Rychlost rozpadu u ohořelého kousku dřeva nalezeného v roce 1950 v jeskyni Lascaux v jihozápadní Francii (významná svými paleolitickými malbami) byla 0,97 rozpadů za minutu v jednom gramu. U živého dřeva je rychlost 6,68 rozpadů za minutu v jednom gramu.

Stáří ohořelého kousku je tedy

$$t - t_0 = 8\,266,6426 \cdot \ln \frac{6,68}{0,97} = 15\,951 \text{ let.}$$

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – Stonehenge – úloha pro samostatné řešení

V roce 1977 bylo provedeno měření rychlosti rozpadu u ohořelého kousku dřeva nalezeného v Stonehenge s výsledkem 4, 16 rozpadů za minutu v jednom gramu.

Určete stáří Stonehenge za předpokladu, že tento kousek dřeva pochází ze stromu poraženého při jeho stavbě.

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – úskalí

Za vzorek, jímž poměříme množství ^{14}C již nemůžeme vzít nic současného:

- ▶ snížení koncentrace ^{14}C : velmi mnoho neaktivního uhlíku vzniká ze spalování fosilních paliv
- ▶ zvýšení koncentrace ^{14}C : testy jaderných zbraní

Základní standard: vzorky kyseliny šťavelové připravené americkým *National Bureau of Standards*.

Existují speciální (dokonce i komerční) laboratoře.

Rozpad radioaktivní látky

Radiouhlíková metoda – úskalí

- ▶ obtížná detekce ^{14}C , je potřeba nákladné přístrojové vybavení
- ▶ vznik ^{14}C v atmosféře kolísá, podobně také kolísá jeho výskyt v organismech a jejich částech
- ▶ zkoumaná část vzorku je zcela zničena
- ▶ určí se, kdy organismus odumřel, nelze např. zjistit sekundární použití materiálu na stavby

Nejčastěji se zkoumají kosti, úlomky dřeva, ohořelé dřevo z dávných ohnišť, chlupy a vlasy, hliněné nádoby, mušle.

Velmi účinná je korekce pomocí **dendrochronologie** (založena na posloupnosti letokruhů).