Obyčejné diferenciální rovnice

Základní aplikace

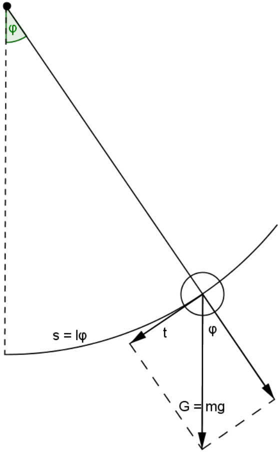
Zdeněk Halas

KDM MFF UK, 2011

Aplikace matem. pro učitele

Osnova

Matematické kyvadlo



Matematické kyvadlo

Základní vztahy: $F = ma$, $\quad a = \dot{v} = \ddot{s} \quad \Rightarrow \quad G = mg$.

L – délka kyvadla $\quad m$ – hmotnost kyvadla $\quad \varphi$ – úhlová výchylka

Tíhu $\vec{G}$ rozložíme na složky, $\vec{t}$ – složka působící ve směru tečny ke kružnici, po níž se kyvadlo pohybuje.

Z pravoúhlého trojúhelníka máme

$$\sin\varphi = \frac{t}{G} \qquad \text{tj. } t = G\sin\varphi = mg\sin\varphi\,.$$

φ je v radiánech, proto dráha $s = L\varphi$. $\quad$ Z $F = ma$ máme

$$-t = ma = m\ddot{s} = mL\ddot{\varphi}\,.$$

Z rovnováhy opačných sil dostáváme rovnici

$$mL\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi\,.$$

Matematické kyvadlo

Po úpravě máme diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0 \,.$$

Matematické kyvadlo

Fyzikální odvození

Je-li kyvadlo vychýleno z rovnovážné polohy, působí na ně tíha $\vec{G} = m\vec{g}$ momentem M vzhledem k ose o kyvadla.

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{t}|}{mg}$$

$$M = -L|\vec{t}| = -LG\sin\varphi = -Lmg\sin\varphi$$

Po zanedbání všech disipativních sil dostaneme pohybovou rovnici

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -Lmg\sin\varphi\,,$$

kde $I = L^2 m$ je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose. Celkově tedy dostáváme

$$L^2 m \cdot \ddot{\varphi} = -Lmg\sin\varphi\,.$$

Matematické kyvadlo

Řešení

Rovnice matematického kyvadla:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0 \,.$$

Pokud je úhlová výchylka φ velmi malá, je

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

a rovnici tedy můžeme linearizovat. Obdržíme lineární rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \varphi = 0 \,.$$

Označíme-li

$$a = \sqrt{\frac{g}{L}} \,,$$

máme

$$\ddot{\varphi} + a^2 \varphi = 0 \,.$$

Matematické kyvadlo

Řešení

Rovnice

$$\ddot{\varphi} + a^2\varphi = 0$$

má obecné řešení

$$\varphi(t) = C_1 \sin at + C_2 \cos at\,.$$

Při zadané počáteční úhlové výchylce $\varphi_0 = \varphi(0)$ a počáteční rychlosti $\dot{\varphi}(0) = 0$ máme jediné řešení

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos at\,.$$