Obyčejné diferenciální rovnice

Nejzákladnější aplikace – křivky

Zdeněk Halas

KDM MFF UK, 2011

Aplikace matem. pro učitele

Osnova

Parabola

Řetězovka

Visuté mosty

Traktrix

Parabola

Parabola

Definice a základní vlastnost paraboly

Parabola

Je-li v rovině zadána přímka p a bod $F \notin p$, pak parabolou rozumíme množinu

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : \rho(X, F) = \rho(X, p)\} .$$

Bod F – ohnisko paraboly; přímka p – řídicí přímka.

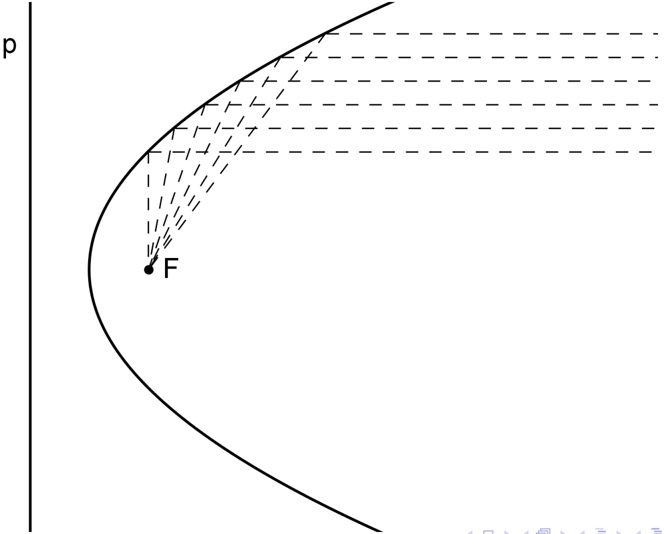
Ohnisková vlastnost paraboly:

Všechny paprsky rovnoběžné s osou paraboly (viz obr.) se odrážejí od paraboly tak, že po odrazu procházejí ohniskem F.

Parabola je navíc jedinou křivkou, která tuto vlastnost splňuje.

Parabola

Obrázek k odvození



Parabola

Ohnisková vlastnost paraboly – jednoznačnost

Důkaz základní vlastnosti paraboly – viz geometrie.
Že je parabola jedinou křivkou, která paprsky odráží do jediného bodu, můžeme ukázat také geometricky přímo z definice, nebo takto: hledaná křivka $y = y(x)$ musí vyhovovat diferenciální rovnici

$$y(x) - x \cdot \frac{y'^2(x) - 1}{2y'(x)} = C\,.$$

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti

Nejstarší dochovanou zmínkou využití ohniskové vlastnosti paraboly jsou vyprávění o Archimédově obraně Syrákús.
Archimédés prý sestavil velká parabolická zrcadla z leštěných kovových štítů. Každé takové zrcadlo orientoval tak, že jeho osa směřovala ke Slunci a ohnisko bylo co nejblíže římské lodi.

V dnešní době proběhly úspěšné pokusy o rekonstrukci (např. na MIT), ovšem vesměs za lepších podmínek, než které měl Archimédés (lepší technické vybavení, menší vzdálenost lodi od zrcadla, ...), a tak zůstávají pochybnosti o věrohodnosti těchto zpráv.

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti

Parabolické antény
jsou obvykle orientovány tak, že jejich osa směřuje ke zdroji signálu. Přijímač je v ohnisku.
V údolích je možno spatřit dvojice antén – jedna je položena výše a přijímá signál přímo od zdroje, druhá je položena níže a přijímá signál přijatý výše položenou anténou.

Radary
fungují podobně, vysílače radarů jsou v ohnisku, vysílaný signál se pak šíří rovnoběžně s osou paraboloidu. Aby radar zabral co největší oblast, tak se neustále otáčí a jeho osa je téměř vodorovná.

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti

Reflektory
žárovka je umístěna v ohnisku a paprsky potom vycházejí rovnoběžně s osou paraboloidu.

Solární tavicí pece
největší a nejstarší je v Odeillo ve francouzských Pyrenejích.
Parabolické zrcadlo 1830 m^2. Ohnisko je 18 metrů před zrcadlem.
Dosahuje teploty kolem 3 500 °C.
Otáčet celým zrcadlem a pecí by bylo obtížné, proto je na svahu 63 heliostatů – zrcadel natáčených hodinovým mechanismem tak, aby odrážela sluneční paprsky rovnoběžně s osou paraboloidu.
Pec se využívá pro vědecké účely.

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti – tavicí pec v Odeillo

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti – teleskopy

Teleskopy – základní myšlenka
Zrcadlem ve tvaru rotačního paraboloidu zamíříme na pozorovaný objekt tak, že osa směřuje k objektu. Světlo totiž musí přicházet z dostatečné dálky, aby přicházelo rovnoběžně s osou paraboloidu a odráželo se do jeho ohniska, kde se tvoří obraz.
Problém: ohnisko je nad zrcadlem, tj. pozorovatel by měl být také nad zrcadlem, aby mohl obraz vidět. Tím by však obraz rušil. Klasická řešení jsou dvě:

1. Newtonův teleskop
Před ohniskem je nakloněné rovinné zrcadlo, které odráží obraz mimo prostor nad zrcadlem.

Parabola

Aplikace ohniskové vlastnosti – teleskopy

2. Schmidt–Cassegrainův teleskop
využívá vlastnosti hyperboly: paprsek, jenž míří do ohniska jedné větve, ale který se od ní odrazí „z vnějšku“, prochází ohniskem druhé větve.
Před ohnisko umístíme hyperbolické zrcadlo tak, že ohnisko paraboly je zároveň ohniskem hyperboly. Paprsky směřující do ohniska paraboly tedy zároveň směřují do ohniska hyperboly, která je však odráží do svého druhého ohniska, kde je pozorovatel (pod parabolickým zrcadlem).

Parabola a ostatní kuželosečky

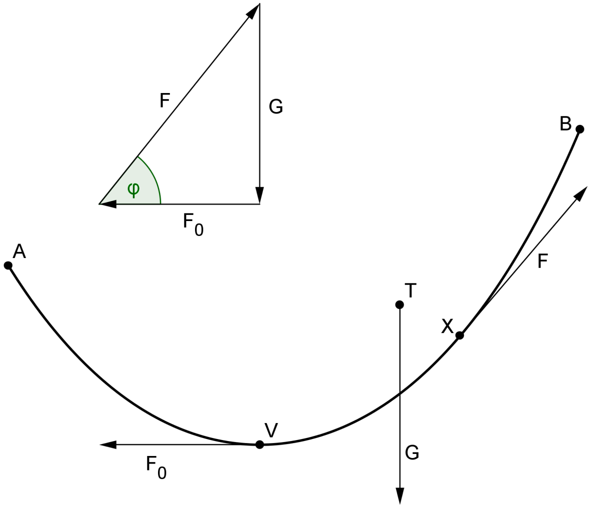
Aplikace v architektuře

Aplikace kvadratických ploch (a obecně i dalších ploch) v architektuře jsou natolik významné, že jim je věnována samostatná přednáška.

Řetězovka

Řetězovka

Obrázek k odvození



Řetězovka

Odvození diferenciální rovnice

Řetěz – předpokládáme dokonale ohebný; hledáme jeho tvar $y(x)$. Volíme KSS tak, že bod V je jejím počátkem.

Tíha G je přímo úměrná délce $L(x)$ řetězu od bodu V do bodu X:

$$G = mg = k \cdot L(x)$$

a síly jsou v rovnováze (řetěz visí v klidu):

$$\vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{G} = 0\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka máme (při označení $a = \dfrac{k}{F_0}$):

$$\operatorname{tg}\varphi = y'(x) = \frac{G}{F_0} = \frac{k \cdot L(x)}{F_0} = a \cdot L(x)\,.$$

Řetězovka

Odvození diferenciální rovnice

Máme tedy rovnici (a vztah pro délku křivky):

$$y'(x) = a \cdot L(x) \qquad \text{a} \qquad L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Dosazením dostaneme

$$y'(x) = a \cdot \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Substitucí $z(x) = y'(x)$ získáme

$$z(x) = a \cdot \int_0^x \sqrt{1 + z^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{a derivací} \quad z'(x) = a \cdot \sqrt{1 + z^2(x)}\,.$$

Jelikož je tečna v bodě V vodorovná, máme počáteční podmínku $y'(0) = z(0) = 0$.

Řetězovka

Řešení diferenciální rovnice

Počáteční úloha

$$z'(x) = a \cdot \sqrt{1 + z^2(x)}\,, \quad z(0) = 0\,,$$

má snadno odhadnutelné řešení na základě tohoto pozorování:

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,.$$

Řešením je tedy

$$z(x) = \sinh ax\,.$$

Řetězovka

Řešení diferenciální rovnice

Návrat k y: $y'(x) = \sinh ax$, tj.

$$y(x) = \frac{1}{a} \cdot \cosh ax + C\,.$$

Jelikož jsme kartézskou soustavu zvolili tak, že v nejníže položeném bodě V je počátek, dostáváme další podmínku $y(0) = 0$, odkud pak

$$0 = y(0) = \frac{1}{a} \cdot \cosh a \cdot 0 + C\,,$$

$$C = -\frac{1}{a}\,.$$

Řešením je tedy

$$y(x) = \frac{1}{a} \cdot \Big(\cosh ax - 1\Big)\,, \qquad \text{kde} \quad a = \frac{k}{F_0}\,.$$

Ideální oblouk

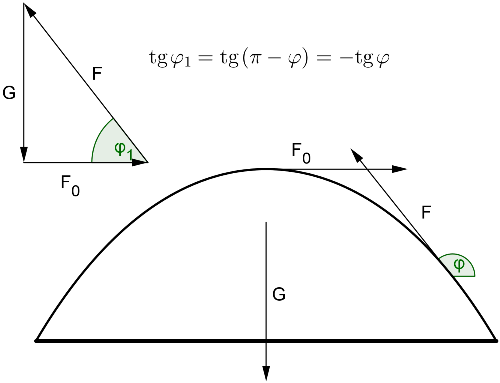
Nalezněme tvar ideálního oblouku, tj. oblouku, který splňuje následující podmínky:

- síly, které jej udržují v rovnovážném stavu, vznikají pouze díky jeho hmotnosti,
- tyto síly jsou přenášeny pouze ve směru tečny ke křivce tohoto oblouku,
- ostatní síly ve stavebním materiálu můžeme zanedbat.

Přenášení sil ve směru tečny – tak to fungovalo u řetězovky.

Ideální oblouk

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$$



Až na znaménko minus tedy dostaneme opět řetězovku („obrácená řetězovka“).

Ideální oblouk

Gateway Arch, St. Louis

Ideální oblouk

Icehotel, Jukkasjärvi

Ideální oblouk

Icehotel, Jukkasjärvi

Ideální oblouk

Sagrada Familia

Architekt Antoni Gaudí znal dobře vlastnosti řetězovky. Když studoval složité soustavy oblouků, kdy například jeden oblouk byl základem pro další, modeloval si Gaudí situaci pomocí řetízků. Pomocí zrcadla potom mohl přímo odečítat tvary oblouků, které si představoval.

Mýdlová bublina

Máme elastickou blánu napnutou mezi dvěma rovnoběžnými kružnicemi se stejným poloměrem. Budeme-li kružnice od sebe oddalovat, vytvoří blána plášť válce?

Hledáme funkci $y = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1[-a, a]$ (površku hledaného pláště) takovou, že zároveň

- $f(-a) = f(a) = r, \quad r \in \mathbb{R}^+$,
- rotací jejího grafu kolem osy x dostaneme plochu minimálního obsahu.

Je tedy potřeba minimalizovat integrál

$$I(y) = 2\pi \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řetězovka

Mýdlová bublina

Na základě variačního počtu (z tzv. Eulerovy rovnice) bychom získali podmínku

$$\frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C\,,$$

což po úpravě dává jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C\,.$$

Jejím rozřešením vzhledem k nejvyšší derivaci dostaneme

$$y' = \pm\frac{1}{C}\sqrt{y^2 - C^2}\,.$$

Odtud a z okrajových podmínek máme řešení

$$y(x) = C \cdot \cosh\frac{x}{C} + K\,,$$

kde $K,\ C \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Řetězovka

Mýdlová bublina

Z nalezeného řešení

$$y(x) = C \cdot \cosh \frac{x}{C} + K$$

je vidět, že hledanou křivkou je řetězovka, jejíž rotací nedostaneme plášť válce, ale tzv. katenoid.

Úloha: srovnejte obsah katenoidu a pláště příslušného válce.

Visuté mosty

Visuté mosty se zavěšenou mostovkou

Jaký tvar má lano, na kterém je zavěšen most?

Visuté mosty se zavěšenou mostovkou

Náčrtek i odvození probíhá analogicky jako u řetězovky, dojdeme tedy opět k rovnici

$$y'(x) = a \cdot L(x)\,. \tag{1}$$

Rozdíl je pouze v tom, že tíha G je přímo úměrná délce $L(x)$ mostovky, nikoli délce lana (hmotnost lana je totiž oproti hmotnosti mostovky zanedbatelná). Proto je $L(x) = x$. Rovnice (1) tak přejde ve velmi jednoduchý tvar

$$y'(x) = a \cdot x\,.$$

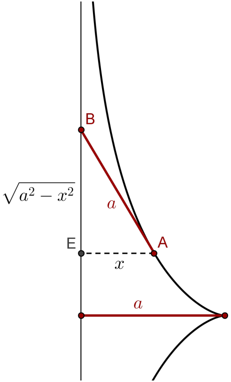
Prostou integrací dostaneme kvadratickou funkci, hledanou křivkou je tedy parabola.

Traktrix

Traktrix

Obrázek k odvození

Řetězovka je obálkou křivky traktrix.
Úsečka AB délky a leží na ose x, bod B je z počátku tažen po ose y.
Bod A pak opisuje křivku ***traktrix***.



Traktrix

Odvození

Z pravoúhlého trojúhelníku *ABE* a z faktu, že úsečka *AB* je tečnou ke grafu hledané křivky $y(x)$, dostáváme přímo diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,.$$

Prostou integrací s využitím $y(a) = 0$ obdržíme předpis traktrix:

$$y(x) = a \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Traktrix je křivka velmi důležitá v geometrii: její rotací kolem osy y dostáváme tzv. pseudosféru, tj. plochu se zápornou konstantní křivostí, na níž se modeluje Lobačevského geometrie.
(Naproti tomu sféra má kladnou konstantní křivost.)