

(1) Potřebujeme spočítat integrál

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt, (*)$$

kde $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{2} e^{2t}$.

Máme $\varphi_1'(t) = e^t$ a $\varphi_2'(t) = e^{2t}$ a tedy (*) má tvar

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^{2t} + e^{4t}} dt = \int_0^{\log 2} e^t \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^t \quad du = e^t dt \\ 0 \rightarrow 1 \quad \log 2 \rightarrow 2 \end{array} \right|$$

tento integrál
lze spočítat mnoha
dalšími způsoby,
viz. domácí úkol
z prvních dvou týdnů

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \sqrt{1+u^2} du = \left| \begin{array}{ll} s = \sqrt{1+u^2} & s' = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ g' = 1 & g = u \end{array} \right| \\ &= \left[u \sqrt{1+u^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} du \quad \text{tabulkový integrál} \\ &= 2\sqrt{5} - \sqrt{2} - \int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} du + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &= 2\sqrt{5} - \sqrt{2} - \int_1^2 \sqrt{1+u^2} du + \left[\operatorname{arcsinh} u \right]_1^2 \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\int_1^2 \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \operatorname{arcsinh} 2 - \operatorname{arcsinh} 1 \right)$$

(2) Řešíme rovnici

(*) $xy' + 8y - 2x^3\sqrt{y} = 0$ vydělíme x a dostaneme Bernoulliho rovnici pro $\alpha = \frac{1}{2}$

(*) $y' + 8\frac{y}{x} = 2x^2\sqrt{y}$ vynásobíme $(1-\alpha)y^{-\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{y}$

$$\frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}} + 4\frac{\sqrt{y}}{x} = x^2$$

a zavedeme substituci $z = \sqrt{y}$
 $(z' = \frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}})$

(*) $z' + \frac{4}{x}z = x^2$

To je lineární rovnice 1. řádu pro

$$A(x) = 4\log|x| = \log x^4$$

$a(x) = \frac{4}{x}$ $b(x) = x^2$, uvažujeme ji na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

$$B(x) \equiv \int b(x)e^{A(x)} dx = \int x^6 dx \stackrel{c}{=} \frac{x^7}{7}$$

Obecné řešení rovnice (*) má tedy tvar

$$z = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{A(x)} = \frac{x^3}{7} + \frac{C}{x^4} = \frac{x^7 + D}{7x^4} \quad \begin{matrix} C, D \in \mathbb{R}, \\ x \in (-\infty, 0), (0, \infty). \end{matrix}$$

Při zpětné substituci $y = z^2$ musíme dát pozor na to, že potřebujeme $z > 0$ (ostrá nerovnost proto, že jsme $\sqrt{y}$ dělili)

To nám dává podmínku $x^7 + D > 0$

To nám dává podmínku $X^7 + D > 0$

Pokud: • $D \geq 0$ a $x \in (0, \infty)$ dostáváme interval $(0, \infty)$

• $D \geq 0$ a $x \in (-\infty, 0)$ dostáváme $(-\sqrt[7]{D}, 0)$

• $D < 0$ a $x \in (0, \infty)$ dostáváme $(\sqrt[7]{-D}, \infty)$

• $D < 0$ a $x \in (-\infty, 0)$ dostáváme prázdnou množinu

A za těchto podmínek řešení rovnice (*)

$$Y = \left(\frac{X^7 + D}{7X^4} \right)^2$$

Vrátíme-li se k původní rovnici (*), vidíme ještě řešení $Y_0 \equiv 0$ na $\mathbb{R}$. Na toto řešení můžeme výše uvedená řešení nalepit. Dostaneme tak sňátlou maximální řešení

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & x < -\sqrt[7]{D} \\ \left(\frac{X^7 + D}{7X^4} \right)^2 & -\sqrt[7]{D} \leq x < 0 \end{cases} \quad D \geq 0$$

$$Y_2 = \begin{cases} 0 & x < -\sqrt[7]{-D} \\ \left(\frac{X^7 + D}{7X^4} \right)^2 & -\sqrt[7]{-D} \leq x \end{cases} \quad D < 0$$

$$Y_3 = \left(\frac{X^7 + D}{7X^4} \right)^2 \quad x > 0 \quad D \geq 0$$

$$Y_4 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$