1) Dokážeme, že pro $a\in\mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}=0$.

Pro $\varepsilon>0$ tedy chceme najít $N\in\mathbb{N}$, aby

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \le \varepsilon \quad \text{pro } n\ge N.$$

Můžeme předpokládat, že $a>0$ ukážeme, že posloupnost $\left\{\frac{a^n}{(n-1)!}\right\}$ je shora omezená. Podle Archimedova axiomu

existuje $N\in\mathbb{N}$, že $N\ge a$, potom pro $n\ge N$

$$\frac{a^n}{(n-1)!} \le \overbrace{\frac{a^N}{(N-1)!}}^{C=}\cdot\frac{a^{n-N}}{N(N+1)\cdots(n-1)} \le C\cdot\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N} \le C.$$

Položme $D=\max\left\{\frac{a^n}{(n-1)!} : 1\le n<N\right\}$

Potom $\frac{a^n}{(n-1)!}\le \underbrace{\max(C,D)}_{=E}$ a a_n je shora omezená.

Volme $\varepsilon>0$, podle Archimedovy vlastnosti $\mathbb{R}$ existuje $N\in\mathbb{N}$, že $N>\frac{E}{\varepsilon}$. Potom pro $n\ge N$

$$0\le \frac{a^n}{n!}\le \frac{1}{n}\cdot\frac{a^n}{(n-1)!}\le \frac{1}{N}\cdot E<\varepsilon$$ což nám stačí.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Chceme ukázat, že pro $1 > \varepsilon > 0$

existuje $N \in \mathbb{N}$, že $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.

Protože $\sqrt[n]{n} > 1$ stačí $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$.

Potom $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon \iff n < (1+\varepsilon)^n$.

Podle binomické věty

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \sum_{k=3}^{N} \binom{n}{k} \varepsilon^k$$

$$\geq n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 = \frac{n^2}{2}\varepsilon^2 + \underbrace{n\varepsilon - \frac{n}{2}\varepsilon^2}_{\varepsilon^2 < \varepsilon \to \ \geq 0} \geq n \cdot \frac{n\varepsilon^2}{2}$$

Podle Archimedovy vlastnosti reálných čísel existuje

$N \in \mathbb{N}$, že $N > \frac{2}{\varepsilon^2}$ potom pro $n \geq N$ dostáváme

$(1+\varepsilon)^n \geq n \cdot \frac{n\varepsilon^2}{2} \geq n \cdot N \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} > n$ což jsme chtěli.

chová se jako $n^{\frac{3}{2}}$ jako $n^{\frac{4}{3}}$

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}} = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{5} < \frac{3}{2} \right)$$

jako $n^{\frac{3}{2}}$ $n^{\frac{7}{5}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \cdot \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}^{1}+\overbrace{\sqrt{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}}}^{0}}{\underbrace{\sqrt[4]{1-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^{\frac{12}{2}}}}}_{1}+\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{15}{2}}}}}_{0}} = \underline{\underline{1}}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n+1} = \underline{\underline{1}}$$

parciální zlomky

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = ?$ Položme $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$.

Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{(n+1)^2-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pro $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $n \geq 1$.

Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, potom L splňuje $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$, $\Updownarrow$ $L^2 = 1$

což dává $L \in \{\pm 1, \pm\infty\}$. Zjevně $L \geq 0$.

Zkusíme dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Předně ukážeme, že $\boxed{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1 \text{ pro } a > 0 \quad (*)}$

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1 \overset{a>0}{\iff} a^2 - 2a + 1 > 0 \iff (a-1)^2 > 0 \quad \checkmark$$

Dokážeme, že (i) $a_n \geq 1$ pro $n \geq 2$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ pro $n \geq 2$

(i) dokážeme indukcí:

- $a_2 > 1$ podle $(*)$ ($a_1 > 0$ podle předpokladů)
- pokud $\underbrace{a_n > 1}_{IP} > 0$, pak $a_{n+1} > 1$ podle $(*)$

(ii) protože $a_n \geq 1$ $n \geq 2$ a $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$

stačí ukázat $a \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ pro $a \geq 1$

$a \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 \geq 1$ <- platí pro $a \geq 1$.

Tedy stačí předefinovat a_1 aby byla $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená konstantou 1. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje vlastní a musí být tedy rovna 1.