8.1.2021

pátek 8. října 2021 11:47

(1) $F(y)=\int_0^1 y^2+yy'+(y')^2$ $M=\{y\in C^1([a,b]): y(0)=0, y(1)=\sinh 1\}$

Víme, že jediný stacionární bod je $y=\sinh x$.

Máme $f=y^2+yz+z^2$. Tedy pro $x\in[0,1]$ a $g:(y,z)\to f(x,y,z)$

platí $H_g=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Protože H_g je PD je

g konvexní (pro každé x) a tedy $\sinh x$ je

bodem (glob.) minima.

(2) $F(y)=\int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2}$, $y(2)=4$, $y(3)=9$

Jediný stac. bod je $y=x^2$. Uvažme pro $x\in[2,3]$

funkci $g(y,z)=f(x,y,z)=\frac{x^3}{z^2}$. Ta je zjevně konvexní.

Funkce x^2 je tedy bodem (glob.) minima F.

(3) $F(y)=\int_1^2 x^2(y')^2 \qquad y(1)=1,\ y(2)=2$

$f(x,y,z)=x^2z^2,\quad f_y=0,\quad f_z=2x^2z$

Tedy E-L rovnice $-[2x^2y']'=0$

Tedy $2x^2y'=C,\quad y=\frac{D}{x}+E.$ $\quad \begin{cases} D+E=1 \\ \frac{D}{2}+E=2 \end{cases}$

Podle okrajových podmínek dostáváme $D=-2,\ E=3.$

Jediným stac. bodem je tedy $y=-\frac{2}{x}+3.$

Funkce $(y,z)\to x^2z^2$ je konvexní, jde tedy o minimum.

(4) $F(y)=\int_1^2 x^2(y')^2+2yy' \qquad y(1)=1,\ y(2)=2$

Jediný stac. bod je $y=-\frac{2}{x}+3.$ Pro $x\in[1,2]$

a $g:(y,z)\to f(x,y,z)=x^2z^2+2yz$ platí

$H_g=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2x^2 \end{pmatrix}$ – indefinitní

Zkusíme Jacobiho větu

$$P = f_{zz}(x, y, y') = 2x^2 > 0$$

$$Q = f_{yy}(x, y, y') - [f_{yz}(x, y, y')]' = 0 - [2]' = 0$$

Řešíme tedy rovnici

$$0 = -(Ph')' + Qh = -(2x^2h')'$$

Tedy $2x^2h' = C$ a $h = \frac{D}{x} + E$.

Chcem vědět, zda existuje řešení pro podmínku

$h(1) = 0$ a $h(\xi) = 0$ pro nějaké $\xi \in (1, 2]$.

To dává soustavu
$$\left.\begin{aligned} D + E &= 0 \\ \frac{D}{\xi} + E &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &D = -E \\ &\frac{D}{\xi} = D \Rightarrow \xi = 1 \end{aligned}$$

Funkce $-\frac{2}{x} + 3$ bodem (glob.) minima.

(5) $F(y) = \int_{-1}^{1} 2y^2 + x^2 (y')^2 \quad y(-1) = -1,\ y(1) = 1$

Jediný stac. bod je $y = x$.

Pro $x \in [-1,1]$ a funkci $g : (y,z) \to f(x,y,z) = 2y^2 + x^2 z^2$

platí $H_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$ což je pozitivně semidefinitní

matice a tedy g je konvexní (pro všechna $x \in [-1,1]$).

Funkce $y = x$ je tedy bodem (globálního) minima.