Příklady 3.11]

středa 4. listopadu 2020 1:38

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ ax+b & x > 1. \end{cases}$

Nejdřív zjistíme, kdy je $f$ spojitá v 1.

$\lim_{x\to 1-} x^2 = 1 = f(1)$, $\lim_{x \to 1+} ax+b = a+b$,

tedy $f$ je spojitá v 1 pokud $1 = a+b$ (*)

Pokud (*) platí potom

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} x+1 = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{ax+b-1}{x-1} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{ax-a}{x-1} = a$$

$f'(1)$ tedy existuje pokud $a=2$, což dává $b=-1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)\cdot|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$$

Protože $-|x|^{\alpha-1} \leq \operatorname{sgn}(x)\cdot|x|^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x} \leq |x|^{\alpha-1}$,

a pro $\alpha>1$ $\lim_{x\to 0} -|x|^{\alpha-1} = \lim_{x\to 0}|x|^{\alpha-1} = 0$.

Dostáváme podle věty o dvou strážnících $f'(0)=0$ pro $\alpha>1$.

Na druhou stranu, pokud $\alpha \leq 1$ a $0<|x|^{\alpha-1}\leq 1$ potom $|x|^{\alpha-1}\geq 1$. Protože pro každé $\delta>0$ existují $x^+, x^- \in P(0,\delta)$ splňující $\sin\frac{1}{x^\pm} = \pm 1$ limita $\lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Celkově tedy $f'(0)$ existuje právě když $\alpha>1$, a v tom případě $f'(0)=0$.

Zkusíme teď zjistit kdy je $f'$ spojitá v 0.

Pro $x\neq 0$ spočítáme

$$f'(x) = \left(|x|^\alpha \sin\frac{1}{x}\right)' = \alpha\cdot\operatorname{sgn} x\cdot|x|^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x} + |x|^\alpha\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}$$

$$= \alpha \cdot \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x} - |x|^{\alpha-2} \cos\frac{1}{x}$$

Obdobně jako v předchozím kroku dokážeme

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{pro } \alpha > 2 \\ \text{neexistuje} & \end{cases}$$

Tedy $f'$ je spojitá v 0 právě, když $\alpha > 2$.

(4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ což dává $f(-2) = 5$.

Dále $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$ a tedy $f'(-2) = 0$

Tečna má tedy tvar $f'(-2)(x-(-2)) + f(-2) = 5$.

Normála má tvar $x = -2$.

(5) $$\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{(2x)'(1-x^2) - (1-x^2)' \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}}}$$

(7) $$\left(\log\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)' = \frac{\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)'}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x+\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)'}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\log x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (e^x)' &= e^x \end{aligned}}$$

$$= \frac{e^x+\frac{1}{2}\frac{(1+e^{2x})'}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}}}$$

(8) $$\left(2^{tg\frac{1}{x}}\right)' = \left(tg\frac{1}{x}\right)'\cdot(\log 2)\cdot 2^{tg\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\log 2\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (a^x)' &= \log a\cdot a^x \\ (tg\,x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\log 2\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}$$

(9) $$arctg\,\frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$

(10) $\left[x\cdot \arcsin^2(5x+7)\right]' = \arcsin^2(5x+7) + x\left(\arcsin^2(5x+7)\right)'$

$= \arcsin^2(5x+7) + x\cdot 2\cdot\arcsin(5x+7)\cdot\left(\arcsin(5x+7)\right)'$

$= \arcsin^2(5x+7) + 2x\cdot\arcsin(5x+7)\cdot\dfrac{(5x+7)'}{\sqrt{1-(5x+7)^2}}$ $\left[(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= \arcsin^2(5x+7) + 2x\cdot\arcsin(5x+7)\cdot\dfrac{5}{\sqrt{1-(5x+7)^2}}$

(12) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ $\quad \left[(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2x}{(1+x^2)\cdot\sqrt{(1+x^2)^2-1}}$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{2x}{(1+x^2)\cdot|x|\cdot\sqrt{x^2+2}} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)\cdot\sqrt{x^2+2}}$$

Tedy platí $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2\cdot \mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \pm\sqrt{2}$

Potřebujeme ještě ověřit, že $f$ je spojitá v $0$.
Na to ovšem nelze použít větu o spojitosti složené funkce přímo. To proto, že funkce arccos není definována na okolí bodu $1$, ale jen na levém okolí. Pomůžeme si malým trikem. Definujme funkci $g(x) = \begin{cases} \arccos x, & x \in [-1,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

Potom $\arccos\frac{1}{1+x^2} = g\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, $g$ je spojitá v bodě $1$, $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $0$ a tedy

$$\lim_{x\to 0} \arccos\frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} g\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = g(1) = 0.$$

(14) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}$

odtud snadno odvodíme obecné pravidlo

$$f^{(n)}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)x^{\frac{1}{2}-n}\quad\left(=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}\,x^{\frac{1}{2}-n},\ n\geq 2\right)$$

pro $n=10$ tedy platí

$$f^{(10)}=-\frac{1}{2^{10}}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot x^{\frac{1}{2}-n}$$

$$=-\frac{17!}{2^{18}\cdot 8!}\,x^{-\frac{19}{2}}$$

(15) $f(x) = (x^4+3x)\sin x$

$(x^4+3x)' = 4x^3+3$

$(x^4+3x)'' = 12x^2$

$(x^4+3x)''' = 24x$

$(x^4+3x)^{(4)} = 24$

$(x^4+3x)^{(k)} = 0 \quad k \geq 5$

$(\sin x)^{(4k)} = \sin x$

$(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x$

$(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x$

$(\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x$

Tedy

$$f^{(13)}(x) = \overset{k=0 \quad n-k=13}{\binom{13}{0}(x^4+3x)\cos x} + \overset{k=1 \quad n-k=12}{\binom{13}{1}(4x^3+3)\sin x}$$

$$+ \overset{k=2 \quad n-k=11}{\binom{13}{2}12x^2(-\cos x)} + \overset{k=3 \quad n-k=10}{\binom{13}{3}\cdot 24x(-\sin x)} + \overset{k=4 \quad n-k=9}{\binom{13}{4}\cdot 24\cdot\cos x}$$

$$= (x^4+3x - 13\cdot 12\cdot 6x^2 + 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10)\cos x$$

$$+ (13\cdot 4x^3 + 13\cdot 3 - 13\cdot 12\cdot 11\cdot 4x)\sin x$$