29.10.2021
pátek 29. října 2021 9:00

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$

$$S_N = (1-x)\sum_{n=1}^{N} x^n = (1-x)\cdot x \cdot \frac{1-x^N}{1-x}$$

$$= x(1-x^N)$$

Tedy $S_N \to S$ na $(-1,1]$,

kde $S(x) = \begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & x=1 \end{cases}$

Okamžitě vidíme, že S je nespojitá v bodě 1, tedy neplatí $S_N \rightrightarrows S$ na $(-1,1]$ (ani $(-1,1)$).

Dále
$$S(x)-S_N(x) = x - x + x^{N+1} = x^{N+1}$$

Tedy pro $0<\delta<1$
$$\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |S(x)-S_N(x)| = (1-\delta)^{N+1} \to 0$$

Tedy $S_N \rightrightarrows S$ na $[-1+\delta,1-\delta]$ a tedy speciálně

$$S_N \overset{loc}{\rightrightarrows} S \text{ na } (-1,1).$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2+x^2}}_{}$ $= f_n(x)$

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Tedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}$

Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ platí • $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \searrow 0$

• $\sum \sin nx$ má omezené částečné součty

Tedy řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$.

$$\sup_x \left| \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \right| \underset{x<\frac{1}{2N}}{\geq} \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin \overbrace{\frac{n}{2N}}^{>0}}{\sqrt[3]{n^2+\frac{1}{4N^2}}} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin \frac{n}{2N}}{2n}$$

$$= \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{4N} \cdot \frac{\sin \frac{n}{2N}}{\frac{n}{2N}} \geq N \cdot \frac{1}{4N} \cdot \overbrace{\inf_{x\in[0,1]} \frac{\sin x}{x}}^{,,\alpha>0} = \frac{\alpha}{4} > 0$$

Tedy neplatí B-C podmínka a tedy neplatí $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \rightrightarrows$ na libovolném okolí bodu 0.

Dále
- $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \to 0$ monotónní v n
- $\sum \sin nx$ má stejně omezenou posloupnost částečných součtů na $[\delta, 2\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$

Tedy $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \underset{\text{Dirichletovo kritérium}}{\rightrightarrows}$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right)$

Zkusíme nejdříve nutnou podmínku, ihned vidíme,

že $\displaystyle\sup_x \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) = +\infty$, $n\in\mathbb{N}$.

Nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (na $\mathbb{R}$) tedy neplatí. Na druhou stranu, pro pevné $x\in\mathbb{R}$ platí $\log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right)\to 0$,

nutná podmínka pro bodovou konvergenci na $\mathbb{R}$ tedy platí.

Volme $a>0$ potom pro $x\in[-a,a]$ máme

$\log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) \leq \frac{a^2}{n\cdot\log^2 n}$. Navíc $\sum \frac{a^2}{n\log^2 n} < \infty$.

Tedy $\sum \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) \rightrightarrows$ na $[-a,a]$

(a tedy $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$).

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} x^N e^{-nx}$ $\quad x \in [0,\infty),\ N \in \mathbb{N}.$

Uvažme nejdříve $n \geq 2$.

Vyšetříme chování členů $x^N e^{-nx} =: f_n(x)$

$$f_n'(x) = N x^{N-1} e^{-nx} - n x^N e^{-nx} = x^{N-1} e^{-nx} (N - nx)$$

Tedy $f_n'(x) = 0 \iff x = 0, \frac{N}{n}$.

Proto $\sup_x |f_n(x)| = f_n\left(\frac{N}{n}\right) = \left(\frac{N}{n}\right)^n \cdot e^{-N} = \alpha_n$

Navíc $\sum \alpha_n < \infty$ tedy $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na $[0,\infty)$.

Pro $N = 1$ máme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x e^{-nx}}_{f_n(x)}$.

Srovnáním s geometrickou řadou vidíme, že řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$.

Dále
$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} x e^{-nx} = x\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-x}\right)^n$$
$$= x\,\frac{1-e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}$$

Nyní
$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} =: S(x)$$

a
$$S(x)-S_N(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}\cdot e^{-(N+1)x}$$

Protože
$$S\left(\tfrac{1}{N+1}\right)-S_N\left(\tfrac{1}{N+1}\right) = \frac{\frac{1}{N+1}}{1-e^{-\frac{1}{N+1}}}\cdot\frac{1}{e} \to \frac{1}{e}>0$$

Nekonverguje řada stejnoměrně na $[0,\infty)$.

Pro $a>0$ ale platí pro velká N
$$|S(x)-S_N(x)| \leq C\cdot e^{-(N+1)a} \to 0$$

Tedy řada konverguje stejnoměrně na $[a,\infty)$ a lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cdot x\cdot \log \frac{x}{n}$, $=: f_n(x)$ $\quad x\in(0,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0} |f_n(x)| = +\infty$ není splněna nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady na $(0,\infty)$.

Volme $a>0$ a uvažujme interval $(0,a]$

Položme $a_n(x) = \frac{x}{n}\cdot\log\frac{x}{n}$, $b_n(x) = (-1)^n$

Potom
- $a_n(x)$ je monotónní $\quad (*)$
- $a_n \rightrightarrows 0$ na $(0,a]$ $\quad (*)$
- $\sum b_n$ má stejně omezené část. součty (víme)

$(*)$ pro $\varphi: t \mapsto \frac{x}{t}\log\frac{x}{t}$ platí

$$\varphi'(t) = -\frac{x}{t^2}\log\frac{x}{t} + \frac{x}{t}\,\frac{1}{\frac{x}{t}}\cdot\left(-\frac{x}{t^2}\right)$$

$$= -\frac{x}{t^2}\left(\log\frac{x}{t}+1\right) \geq 0 \text{ pro } t\geq ea$$

(*) $$a_n'(x) = \frac{1}{n}\log\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\log\frac{x}{n} + \frac{1}{n}$$

$$a_n'(x) = 0 \iff \log\frac{x}{n} = -1 \iff x = \frac{n}{e} \to \infty$$

Pokud $\frac{n}{e} \geq a$ potom má $|a_n|$ maximum v bodě a, navíc $a_n(a) \to 0$.

Řada tedy konverguje stejnoměrně na $(0,a]$ podle Dirichletova kritéria.