Řešení 26.11.

čtvrtek 25. listopadu 2021 19:33

(1) $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$, $a \in (0,\infty)$, spojitá?

- $x \to e^{-ax^2}$ měřitelná $a \in (0,\infty)$
- $a \to e^{-ax^2}$ spojitá pro (s.v.) $x \in (0,\infty)$
- volme $\beta > 0$, potom pro $a \in (\beta,\infty)$ platí

$$\left|e^{-ax^2}\right| \leq e^{-\beta x^2} =: g(x) \in \mathcal{L}(0,\infty).$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \leq 1 + \int_1^\infty e^{-\beta x} = 1 + \left[-\frac{e^{-\beta x}}{\beta}\right]_1^\infty = 1 + \frac{e^{-\beta}}{\beta} < \infty \right]$$

Tedy F je spojitá na (β,∞), $\beta > 0$,

a tedy F je spojitá na $(0,\infty)$.

(2) $F(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx\ ,\ a\in(0,\infty)$

- $x \to x^{a-1}e^{-x}$ měřitelná na $(0,\infty)$
- $a \to x^{a-1}e^{-x}$ spojitá na $(0,\infty)$
- volme $0<\alpha<\beta<\infty$, potom

pro $a\in(\alpha,\beta)$ platí

$$|x^{a-1}e^{-x}| \leq x^{\alpha-1} \qquad x\in(0,1]$$

$$\leq x^{\beta-1}e^{-x} \leq C e^{-\frac{x}{2}}\ ,\ x\in[1,\infty)$$

$$x^{\beta-1} \leq C e^{\frac{x}{2}} \quad x\in[1,\infty)$$

pro dostatečně velké C

$$g(x)=\begin{cases} x^{\alpha-1} & x\in(0,1] \\ C e^{-\frac{x}{2}} & x\in(1,\infty) \end{cases} \in \mathcal{L}((0,\infty))$$

$$\left[\ \int_0^{a} |g| = \int_0^1 x^{\alpha-1} + \int_1^{\infty} C e^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\alpha+1} + \frac{C}{2}\ \right]$$

Tedy F je spojitá na (α,β) a tedy i na $(0,\infty)$.

(3) $F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\,dx \quad a \in (0,\infty)$.

- $x \to \frac{\sin x}{x} e^{-ax}$ měřitelná pro $a \in (0,\infty)$
- $a \to \frac{\sin x}{x} e^{-ax}$ spojitá pro $x \in (0,\infty)$
- vezme $\alpha > 0$, potom pro $a \in (\alpha,\infty)$

platí
$$\left|\frac{\sin x}{x} e^{-ax}\right| \left.\begin{aligned} &\leq 1 & x \in (0,1) \\ &\leq e^{-\alpha x} & x \in [1,\infty) \end{aligned}\right\} =: g(x)$$

Opět $g \in \mathcal{L}(0,\infty)$ $\left[\int_0^\infty g \leq \int_0^1 1 + \int_1^\infty e^{-\alpha x} < \infty\right]$

Tedy F je spojitá na (α,∞) a tedy i na $(0,\infty)$.

(4) $F(a)=\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx \,, \ a\in(0,\infty).$

- $x \to \log(x^2+a^2)$ měřitelná, $a\in(0,\infty)$
- $a \to \log(x^2+a^2)$ spojitá, $x\in(0,\infty)$
- pro $0<\alpha<\beta<\infty$, $a\in(\alpha,\beta)$ platí

$$\left|\log(x^2+a^2)\right| \leq \max\left(\left|\log\alpha^2\right|, \log(1+\beta^2)\right) = g(x)$$

$$\int_0^1 g = \max\left(\left|\log\alpha^2\right|, \log(1+\beta^2)\right) < \infty$$

Tedy F je spojitá na (α,β) a tedy

F je spojitá na $(0,\infty)$.

(5) $F(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$, $a\in(0,\infty)$,

- $x\to x^{a-1}e^{-x}$ měřitelná $a\in(0,\infty)$
- $\frac{\partial}{\partial a}(x^{a-1}e^{-x}) = \log x\cdot x^{a-1}\cdot e^{-x}$

  existuje vlastní $x\in(0,\infty)$, $a\in(0,\infty)$

- volme $0<\alpha<\beta<\infty$, potom pro

  $a\in(\alpha,\beta)$ platí

$$|\log x\cdot x^{a-1}\cdot e^{-x}|\le C\cdot x^{\frac{\alpha}{2}-1} \quad x\in(0,1]$$

$$\le \log x\cdot x^{\beta-1}\cdot e^{-x}\le De^{-\frac{x}{2}} \quad x\in(1,\infty)$$

Pro nějaká $C,D\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\log x\cdot x^{a-1}}{x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to0+}\log x\cdot x^{a-\alpha}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x \cdot x^{\beta-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x \cdot x^{\beta-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

Opět
$$g(x) = \begin{cases} C x^{\frac{\alpha}{2}-1} & x \in (0,1) \\ D e^{-\frac{x}{2}} & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

leží v $\mathcal{L}((0,\infty))$ a tedy

$$F'(a) = \int_0^\infty \log x \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

Obdobně pro vyšší derivace získáme

$$F^{(n)}(a) = \int_0^\infty \log^n x \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx$$