22.10.2021

pátek 22. října 2021 9:37

(1) $f_n = e^{-nx}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x\in(0,\infty) \\ 1 & x=0 \\ \infty & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

$$f_n \to f \text{ na } [0,\infty), \text{ kde } f(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

f není spojitá ale f_n spojité jsou, tedy konvergence není stejnoměrná. Volme $a>0$, potom $\max f_n$ na intervalu $[a,\infty)$ je $f_n(a)$. Protože $f_n(a)\to 0$ máme $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$, speciálně $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$. Zároveň ale $\sup\limits_{[0,\infty)} f_n = 1$ a tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $(0,\infty)$.

(2) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, $x\in\mathbb{R}$, tedy okamžitě dostáváme $f \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

(3) $f_n(x) = \sin^n x$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x \begin{cases} = 0 & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)+k\pi \\ = 1 & x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \text{neexistuje} & x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

Tedy $f_n \to f$ na $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, kde

!! A

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Protože f je nespojitá neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Volme $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ a volme $0<a<\frac{\pi}{2}$. Potom na $[-a,a]$ platí $|f_n(x)| \leq \sin^n a \to 0$.

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-a,a]$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I a tedy i na $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

$\sup_I |f_n(x)-f(x)| = 1$ tedy neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na I.

(4) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{\pi}{2} & x>0 \end{cases} = f(x)$$

f není spojitá, tedy neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Vyšetříme lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(0,\infty)$.

Volme $a>0$, potom $\sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - f_n(a) \to 0$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$ a tedy i $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.

(6) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \begin{cases} = 0 & x \in (-1,1) \\ = 1 & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ = \frac{1}{2} & x = 1 \\ \text{neexistuje} & x = -1 \end{cases}$$

Tedy $f_n \to f$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, kde $f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

f je nespojitá, tedy neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Na $(-1,1)$: zjevně $\sup_{(-1,1)} |f_n - f| = \frac{1}{2}$

$|a| < 1$ $\quad \max_{[-a,a]} |f_n - f| = f_n(a) \to 0$

$$\left[f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - nx^{n-1} \cdot x^n}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} > 0 \quad x > 0 \right]$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-a,a]$ $0 \le a < 1$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(-1,1)$.

Obdobně $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$, $(-\infty,-a]$ $a > 0$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

(7) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = n\dfrac{x+\frac{1}{n}-x}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}$

Tedy $f_n \to f := \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$

$\sup\limits_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \infty \to$ neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,\infty)$.

$f > f_n$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{8x^{\frac{3}{2}}}$$

Tedy $\sup\limits_{x\in[a,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \le \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{8a^{\frac{3}{2}}} \to 0$

a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$ a tedy i $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.

8) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

$f_n(x) = x^{2n}(1-x^n) \leq a^{2n} \qquad x \in [0,a], 0<a<1$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,a]$, $\left(f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } (0,1)\right)$

$0 = 2n x^{2n-1} - 3n x^{3n-1} = n x^{2n-1}(2-3x^n)$

$x^n = \frac{2}{3} \qquad x_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$

$f_n(x_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 > 0$

Tedy neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

(9) $f_n(x) = \sqrt{n^2+1}\left(e^{\frac{1}{nx}} - 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overset{\nearrow \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{nx}} \cdot \overset{\nearrow 1}{\frac{e^{\frac{1}{nx}} - 1}{\frac{1}{nx}}} \to \frac{1}{x} = f(x)$$

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) = \sqrt{n^2+1}\cdot(e-1) - n \to \infty$$

Tedy neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,\infty)$

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{n^2+1}\left(\frac{1}{nx} + \frac{1}{2n^2x^2} e^{\xi\left(\frac{1}{nx}\right)}\right) - \frac{1}{xn}$$

$$\boxed{e^t = 1 + t + \frac{e^{\xi(t)}}{2} t^2 \qquad \xi(t) \in (0,t)}$$

$x \geq a > 0$

$$= \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{xn} + \frac{1}{2n^2x^2} e^{\xi\left(\frac{1}{nx}\right)} \leq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2a^2} e \to 0$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$ pro $a>0$

a tedy i $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.