(3) $\phi(y) = \int_0^1 x^2\left(y^4 - (y')^2\right)$ $\quad y \in C^1([0,1])$

$$D_h \phi(y) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(y+th) - \phi(y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 x^2\left[(y+th)^4 - (y'+th')^2 - y^4 + (y')^2\right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 x^2\left[y^4 + 4ty^3h + 6t^2y^2h^2 + 4t^3yh^3 + t^4h^4 - y^4 - (y')^2 - 2ty'h' - t^2(h')^2 + (y')^2\right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_0^1 x^2\left[4y^3h + 6ty^2h^2 + 4t^2yh^3 + t^3h^4 - 2y'h' - t(h')^2\right]$$

$$= \int_0^1 x^2\left(4y^3h - 2y'h'\right) \leftarrow \text{Gâteauxova derivace}$$

Ukážeme, že $h \to D_h \phi(y)$ je Fréchetova derivace

$$\phi(y+h) - \phi(y) - D_h \phi(y) = \int_0^1 x^2 \left[6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (h')^2\right]$$

$$\|\cdots\| \leq \int_0^1 x^2 \left[6y^2h^2 + 4|y||h|^3 + h^4 + (h')^2\right]$$

$\|h\| = \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty$

$$\leq \int_0^1 6\|y\|^2\|h\|^2 + 4\|y\|\,\|h\|^3 + \|h\|^4 + \|h\|^2$$

$$\leq C\|h\|^2 \quad \text{pro } \|h\| \leq 1$$

Tedy $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\phi(y+h) - \phi(y) - D_h\phi(y)}{\|h\|} = 0$

(6) $\Phi(y)=\int_0^1 (y)^2+yy'+(y')^2$, $y(0)=0$, $y(1)=\sinh 1$

$f(x,y,z)=y^2+yz+z^2$ $\quad f_y=2y+z$ $\quad f_z=y+2z$

$E\text{-}L \rightarrow \quad 0=f_y(x,y,y')-\left(f_z(x,y,y')\right)'=2y+y'-(y+2y')'$

$f_{zz}=2>0 \rightarrow \quad 0=2y+y'-y'-2y''=2y-2y''$

$\uparrow$

není potřeba

$$\boxed{y=y'', \quad y(0)=0, \quad y(1)=\sinh 1}$$

$y=A\sinh x+B\cosh x \qquad y(0)=0 \rightarrow 0=B$

$\sinh 1=y(1)=A\sinh 1 \rightarrow A=1$

Jediné řešení je tedy $\underline{\underline{y=\sinh x}}$

(7) $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2}$, $y(2)=4$, $y(3)=9$

potřebujeme $y' \neq 0$ na $[2,3]$, tedy $y'>0$, nebo $y'<0$ na $[2,3]$ (y' spojitá).

Protože $y(2)<y(3)$ uvažujeme jen $y'>0$.

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{z^2} \qquad f_y = 0 \qquad f_z = -2\frac{x^3}{z^3}$$

$$\text{E-L} \to \quad 0 = -\left(-2\frac{x^3}{(y')^3}\right)' \to \frac{x^3}{(y')^3} = C$$

$$\boxed{C(y')^3 = x^3 \quad y(2)=4,\ y(3)=9}$$

$$y' = Dx \to y = Ax^2 + B$$

$$\left.\begin{aligned} 4 = y(2) = 4A + B \\ 9 = y(3) = 9A + B \end{aligned}\right\} \to A=1,\ B=0$$

Jediné řešení má tedy tvar $\underline{\underline{y = x^2}}$

(8) $\Phi(y)=\int_1^2 x^2(y')^2+2yy' \quad y(1)=1,\ y(2)=2$

$f(x,y,z)=x^2z^2+2yz \quad f_y=2z \quad f_z=2x^2z+2y$

E-L $\rightarrow \quad 0=2y'-\left(2x^2y'+2y\right)'=2y'-(2x^2y')'-2y'$

$\left(f_{zz}=2x^2>0 \ x\in[1,2]\right) \quad 2x^2y'=C$

$$\boxed{y'=\frac{D}{x^2} \quad y(1)=1,\ y(2)=2}$$

$$y=-\frac{D}{x}+E \qquad \left.\begin{aligned}1&=-D+E\\ 2&=-\frac{D}{2}+E\end{aligned}\right\}\rightarrow D=2, E=3$$

Jediné řešení má tvar $\underline{\underline{y=-\frac{2}{x}+3}}$

(9) $\Phi(y)=\int_{-1}^{1} 2y^2+x^2(y')^2 \qquad y(-1)=-1,\ y(1)=1$

$f(x,y,z)=2y^2+x^2z^2 \qquad f_y=4y \qquad f_z=2x^2z$

E-L $\to$ $0=4y-\left(2x^2y'\right)'$

$f_{zz}=2x^2>0$ pouze na $(-1,0)$ a $(0,1)$

na těchto intervalech tedy máme $y\in C^2$ a

$0=4y-4xy'-2x^2y''$

uvažujeme ot. nadint.

$$\boxed{x^2y''+2xy'-2y=0, \quad \begin{matrix} y(-1)=-1 & x\in[-1,0) \\ y(1)=1 & x\in(0,1] \end{matrix}}$$

Obecné řešení je $y=Ax+\dfrac{B}{x^2}$

$$y = x^\lambda \Rightarrow x^2 \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} + 2x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} - 2x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2 = 0 \rightarrow 0 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

$$\lambda = 1, -2$$

Chceme C^1 funkci na $[-1,1]$, tedy $B = 0$
a A musí být stejné na $[-1,0)$ a $(0,1]$
Okrajové podmínky dávají $y = x$.

(což opravdu řeší $\quad 0 = 4x - (2x^2)'$

(ve skutečnosti vidíme, že $y \in C^2$ na $[-1,1]$)

(10) $\Phi(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x-y')^2 \qquad y(-1)=0,\ y(1)=1$

$f(x,y,z) = y^2(2x-z)^2 \qquad f_y = 2y(2x-z)^2$

$f_z = -2y^2(2x-z)$

E-L $\rightarrow$ $0 = 2y(2x-y')^2 - \left(-2y(2x-y')\right)'$

$y(-1)=0,\ y(1)=1$

Splňuje funkce $f = \begin{cases} 0 & \text{na } [-1,0] \\ x^2 & \text{na } (0,1] \end{cases}$