d) $M = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

nejprve uděláme triviální odhady zespoda a zeshora:

$$0 < 2^{-n} + 3^{-n} \leq 2^{-1} + 3^{-1} = \frac{5}{6}$$

protože $\frac{5}{6} \in M$, dostáváme okamžitě

$\frac{5}{6} = \max M = \sup M$.

Zkusíme ověřit, zda 0 není infimem M, k tomu stačí dokázat platnost výroku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : 2^{-n} + 3^{-n} < \varepsilon .$$

Použijeme nerovnosti $n \leq 2^n \leq 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ty dávají $3^{-n} \leq 2^{-n} \leq \frac{1}{n}$ a tedy

$2^{-n} + 3^{-n} \leq \frac{2}{n}$. Stačí tedy dokázat výrok

(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{2}{n} < \varepsilon$.

Podle Archimedovy vlastnosti $\mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, splňující $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

Protože $\left(n > \frac{2}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow \left(\varepsilon > \frac{2}{n}\right)$

Protože $\left(n > \frac{c}{\varepsilon}\right) \Longleftrightarrow \left(\varepsilon > \frac{c}{n}\right)$
dostáváme platnost výroku (*).

e) $M = \left\{ (-1)^{-n} + \frac{1}{m^2+m-1} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Nejprve si všimneme, že $-1 \leq (-1)^{-n} \leq 1$
a $0 < \frac{1}{m^2+m-1} \leq 1$.

Tyto odhady implikují

$$-1 \leq (-1)^{-n} + \frac{1}{m^2+m-1} \leq 2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Protože

$$2 = (-1)^{-2} + \frac{1}{1^2+1-1} \in M$$

dostáváme $2 = \max M = \sup M$.

Teď zkusíme dokázat, že $\inf M = -1$.
K tomu stačí ověřit pravdivost výroku

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : x > -1 + \varepsilon.$$

Definujme výrok

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m^2+m-1} < \varepsilon.$$

Zřejmě $(**) \Rightarrow (*)$ (volbou např. $n = 1$)

Zřejmě $(**) \Rightarrow (*)$ (volbou např. $n=1$)

Podle Archimedovy vlastnosti $\mathbb{R}$ existuje $m \in \mathbb{N}$, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$.

Protože $m^2+m-1 \geq m$, $m \in \mathbb{N}$, dostáváme, že

$$m > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{m^2+m-1} < \varepsilon$$

a tedy $(**)$ platí.

Tedy $\inf M = -1$. Zároveň $-1 \notin M$ a tedy $\min M$ neexistuje.

2a) $\inf(-A) = -\sup A$, $A \neq \emptyset$ omezená

Nejprve si všimneme, že

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Leftrightarrow (-x \geq -y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} : (x \in A) \Leftrightarrow (-x \in -A)$

Odtud dostáváme:

$(*)$ (s je horní závora A) $\Leftrightarrow$ ($-s$ je dolní závora $-A$)

Položme $s = \sup A$, podle $(*)$ je $-s$ dolní

Položme $s = \sup A$, podle $(*)$ je $-s$ dolní závora $-A$. Zároveň, je-li t dolní závora $-A$, je podle $(*)$ $-t$ horní závora A. Protože $s = \sup A$, platí $-t \geq s$, což je ekvivalentní s $t \leq -s$ a tedy $-s$ je infimem $-A$.

2b) Nechť $s = \sup A$, $t = \sup B$.

Chceme ukázat, že $s+t = \sup(A+B)$.

Nejprve ukážeme, že $s+t$ je horní závora $A+B$.

Zvolme $c \in A+B$, potom existují $a \in A$ $b \in B$, že $a+b = c$. Potom ale $a \leq s$, $b \leq t$ a tedy $c = a+b \leq s+t$ a tedy $s+t$ je horní závora $A+B$.

Abychom dokázali, že $s+t$ je supremem $A+B$ stačí ověřit pravdivost výroku

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in A+B : c > s+t-\varepsilon \ .$$

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Protože $s = \sup A$ a $t = \sup B$ platí

Protože $s = \sup A$ a $t = \sup B$ platí

$$(**) \begin{cases} \exists a \in A : a > s - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists b \in B : b > t - \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Položme $c = a + b \in A + B$. Pak podle $(**)$

$$c = a + b > s - \frac{\varepsilon}{2} + t - \frac{\varepsilon}{2} = s + t - \varepsilon,$$

což dává $(*)$, a jsme hotovi.