Dokázali jsme (nebo alespoň naznačili si důkaz) u:

(G6) $\cos 0 = 1$,

(G7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(G8) $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(G9) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,

(G10) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

(G11) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

(G12) sin i cos jsou $2\pi$periodické, tj. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Zavedli jsme funkce $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotan} c = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Platí

$$D_{\tan x} = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad D_{\operatorname{cotan} x} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

a

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotan} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Omezíme-li definiční obory dostaneme prosté funkce

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \overset{\text{na}}{\to} [-1, 1], \quad \cos : [0, \pi] \overset{\text{na}}{\to} [-1, 1]$$

a

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotan} : (0, \pi) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R},$$

které jsou ryze monotonní a jejichž derivace je (mimo krajní body) nenulová. Existují tedy inverzní funkce

$$\arcsin : [-1, 1] \overset{\text{na}}{\to} [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad \arccos : [-1, 1] \overset{\text{na}}{\to} [0, \pi]$$

a

$$\arctan : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad \operatorname{arccotan} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (0, \pi),$$

S pomocí věty o derivaci inverzní funkce spočítáme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

a

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccotan} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dále jsme uvažovali funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Plati, že sinh, tanh a cotanh jsou liché a cosh je sudá a platí i důležitá identita

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Dále

$$D_{\sinh} = D_{\cosh} = D_{\tanh} = \mathbb{R}, \quad D_{\operatorname{cotanh}} = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a (na celých definičních oborech)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

a

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\operatorname{cotanh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Omezíme-li případně definiční obory dostaneme prosté funkce

$$\sinh : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \cosh : [0, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [1, \infty)$$

a

$$\tanh : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-1, 1), \quad \operatorname{cotanh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \overset{\text{na}}{\to} (-\infty, 1) \cup (1, \infty),$$

které jsou ryze monotonní (u *cotanh* na obou intervalech, prostý je ale na celém definičním oboru) a jejichž derivace je (mimo krajní body) nenulová. Existují tedy inverzní funkce

$$\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcosh} : [1, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [0, \infty)$$

a

$$\operatorname{argtanh} : (-1, 1) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcotanh} : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Opět (s pomocí věty o derivaci inverzní funkce) spočítáme

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$

a

$$(\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1, \quad (\operatorname{argcotanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1.$$