Příklady. *1. Pokud operace* $+$ *a* $\cdot$ *na množině* $\{0,1\}$ *splňují podmínky* $1.-9.$, *potom už nutně*

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=0,$$

a

$$0\cdot 0=0, \quad 0\cdot 1=0, \quad 1\cdot 0=0, \quad 1\cdot 1=1.$$

Dostameme tak tzv. těleso $\mathbb{Z}_2$.

2. Pro dvojice $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ *definujeme operace* $\oplus$ *a* $\odot$ *jako*

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d), \quad (a,b)\odot(c,d)=(a\cdot c, b\cdot d)$$

Pokud ztotožníme dvojice do skupin (tříd ekvivalence) podle relace $a\cdot d=b\cdot c$ *dostaneme racionální čísla.*

3. Pro dvojice $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *definujeme operace* $\oplus$ *a* $\odot$ *jako*

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\odot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c).$$

Položením $i=(0,1)$ *dostáváme* $i^2=(-1,0)$. *Takto dostaneme klasická komplexní čísla.*

Na procvičení. *Zkuste sami ověřit že výše uvedené příklady jsou tělesa. Jak v nich vypadají prvky* 0 *a* 1 *a jaký tvar mají inverzní prvky?*

Definice 0.1 (těleso)**.** *Uspořádaná pětice* $(T,+,\cdot,0,1)$ *se nazývá těleso, pokud* T *je množina,* $0\neq 1$ *prvky* T *a* $+$ *a* $\cdot$ *operace na* T *takové, že pro všechna* $x,y,z\in T$ *platí:*

1. $x+y=y+x$ *(komutativita* $+$*)*
2. $x\cdot y=y\cdot x$ *(komutativita* $\cdot$*)*
3. $x+(y+z)=(x+y)+z$ *(asociativita* $+$*)*
4. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ *(asociativita* $\cdot$*)*
5. $x+0=x$ *(neutralita 0 vzhledem k* $+$*)*
6. $x\cdot 1=x$ *(neutralita* 1 *vzhledem k* $\cdot$*)*
7. *existuje* $-x\in T$ *pro které platí* $x+(-x)=0$ *(existence inverzního prvku pro* $+$*)*
8. *pokud* $x\neq 0$, *potom existuje* $x^{-1}\in T$, *pro které platí* $x\cdot x^{-1}=1$ *(existence inverzního prvku vzhledem k* $\cdot$*)*
9. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ *(distributivita)*

Definice 0.2 (ostré lineární uspořádání)**.** *Relaci* $<$ *na množině* M *nazveme ostrým lineárním (úplným) uspořádáním na* M, *pokud pro každé* $x,y,z\in M$ *platí*

1. $x < y$, $x > y$ *nebo* $x = y$,

2. *pokud* $x < y$ *a* $y < z$, *potom* $x < z$,

3. *neplatí* $x < x$.

Místo ostré lineární uspořádání budeme zpravidla říkat jednoduše uspořádání (jiné varianty uspořádáni nebudeme definovat).

Příklady. *Tělesy jsou například* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$ *s obyklými operacemi* $+$ *a* $\cdot$ *a také* $\mathbb{Z}_p$ *se sčítáním a násobením modulo* p *pro* p *prvočíslo.*

Definice 0.3 (uspořádané těleso)**.** *Šestici* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$, *kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je těleso a* $<$ *je uspořádání na* T, *nazveme uspořádaným tělesem, pokud pro všechna* $x, y, z \in T$ *platí*

1. *pokud* $x < y$, *potom* $x + z < y + z$,

2. *pokud* $x < y$ *a* $z > 0$, *potom* $x \cdot z < y \cdot z$.

Příklady. $\mathbb{Q}$ *je uspořádané těleso,* $\mathbb{Z}_2$ *ani* $\mathbb{C}$ *nejsou.*

Definice 0.4 (omezená množina, sup, inf)**.** *Nechť* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$, *kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je uspořádané těleso a* $M \subset T$. *Prvek* $x \in T$ *nazýváme*

1. *horní závorou množiny* M, *pokud pro každé* $y \in M$ *platí* $y \leq x$

2. *dolní závorou množiny* M, *pokud pro každé* $y \in M$ *platí* $y \geq x$

3. *supremem množiny* M, *pokud pro každé* y *horní závoru* M *platí* $y \geq x$,

4. *infimem množiny* M, *pokud pro každé* y *dolní závoru* M *platí* $y \leq x$,

Množinu M *nazýváme zdola (shora) omezenou, pokud má nějakou dolní (horní) závoru,* M *nazveme omezenou, pokud je zdola i shora omezená.*