Elementární funkce

Věta 0.1 (o jednoznačnosti exponenciály). *Existuje nejvýše jedna funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

(E1) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$, $x, y \in \mathbb{R}$,

(E2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Pro tuto funkci pak dále platí

(E3) $\exp 0 = 1$,

(E4) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$, $x \in \mathbb{R}$,

(E5) $\exp x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(E6) $\exp x > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(E7) $(\exp x)' = \exp x$, $x \in \mathbb{R}$,

(E8) $(\exp x)^{(n)} = \exp x$, $x \in \mathbb{R}$,

(E9) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$,

(E10) exp je spojitá

(E11) obor hodnot exp je $(0, \infty)$

(E12) exp je prostá na $\mathbb{R}$,

(E13) existuje inverzní funkce k exp, kterou značíme $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Pro funkci log dále platí

(L1) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, $x, y \in (0, \infty)$,

(L2) $\log \frac{1}{x} = -\log x$, $x \in (0, \infty)$,

(L3) $\log(1) = 0$,

(L4) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

(L5) log je rostoucí na $(0, \infty)$,

(L6) log je spojitá na $(0, \infty)$

Pomocí funkcí $\exp x$ (budeme psát, jak je zvykem e^x) a log definujeme obecnou mocninu $a^b = e^{b \log a}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, což nám dává obecnou exponenciálu a^x, $x > 0$, obecnou mocninu x^a, $x > 0$ a logaritmus s obecným základem (jako inverzní funkci k a^x).

Platí navíc, že pro $x > 0$ je tato definice konzistentní s předchozími definicemi x^n a $x^{\frac{1}{n}}$. Dejme ale pozor na to, že tyto funkce jsou definovány na větších intervalech (x^n na $\mathbb{R}$, $x^{\frac{1}{n}}$ na $[0, \infty)$ pro n sudé a na $\mathbb{R}$ pro n liché).

Věta 0.2 (o jednoznačnosti funkcí sin a cos). *Existuje nejvýše jedna dvojice funkcí* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jedno číslo* π *splňující:*

(G1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ x, y \in \mathbb{R}$,

(G2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\ x, y \in \mathbb{R}$,

(G3) $\sin(-x) = -\sin x$ (sin je lichá funkce), $\cos(-x) = \cos x$ (cos je sudá funkce)

(G4) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$,

(G5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,

Tyto funkce splňují všechny vlastnosti, které od funkcí sin a cos očekáváme, dokázali jsme (nebo alespoň naznačili si důkaz) u:

(G6) $\cos 0 = 1$,

(G7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ x \in \mathbb{R}$,

(G8) $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.