Výroková funkce je přiřazení výroku prvkům z nějaké skupiny objektů (definičního oboru). Jde tedy o výrok závislý na parametru (skupině parametrů - tzv. **proměnných**). Tyto proměnné můžeme kvantifikovat pomocí kvantifikátorů:

- **existenčního** (malého) kvantifikátoru, který zapisujeme symbolem $\exists$ a čteme existuje, tj. například $\exists n \in \mathbb{N}: \ n > 4$ čteme jako existuje n z $\mathbb{N}$, že $n > 4$
- **univerzálního** (obecného, velkého) který zapisujeme symbolem $\forall$ a čteme pro všechna, tj. například $\forall n \in \mathbb{N}: \ n > 4$ čteme pro všechna n z $\mathbb{N}$ platí, že $n > 4$

Výrok z kvantifikátory pak budeme nazývat **výrokovou formou**. Negaci takových výroků určujeme podle následujících pravidel:

- $(\neg(\exists x \in X : A(x))) \iff (\forall x \in X : \neg A(x))$
- $(\neg(\exists x \in X : A(x))) \iff (\forall x \in X : \neg A(x))$

Negaci výrokových forem s více kvantifikátory pak negujeme postupně aplikováním pravidel výše.

Příklad. *Negace výroku*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: \ n > x$$

je výrok

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ n \leq x$$

Poznamenejme ještě, že (obecně) **záleží na pořadí** kvantifikátorů, například výroky

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: \ n > x$$

a

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ n > x$$

mají jiný význam (zároveň první je pravda a druhý nepravda). Jediný případ, kdy můžeme (obecně) pořadí kvantifikátorů zaměnit je, když máme vedle sebe dva nebo více kvantifikátorů stejného typu.

Chceme-li dokázat výrok (výrokovou formu) typu

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 : A(n)$$

můžeme použít **důkaz indukcí**. V něm postupujeme ve dvou krocích:

1. ověříme platnost výroku $A(n_0)$ (počáteční krok),
2. pro každé $n \geq n_0$ dokážeme implikaci $A(n) \implies A(n+1)$ (indukční krok, předpoklad, že je $A(n)$ ravda nazýváme **indukční předpoklad**)

Příklad. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$.*

Poznamenejme, že to, co jsme nazvali matematickou indukcí bývá také (přesněji) nazýváno **slabou** matematickou indukcí, v případě **silné** matematické indukce pak nahrazujeme indukční předpoklad pravdivosti $A(n)$ předpokladem pravdivosti $A(n_0), \ldots, A(n)$.

Číselné obory, základní vlastnosti reálných čísel (už o něco formálněji)

Pojem **množina** jsme definovali jako soubor prvků, které jsou určeny buď výčtem, nebo nějakou společnou vlastností (problémy s tím spojené budeme diskutovat později). Definovali jsme **kartézský součin** množin M a N nako

$$\{(m,n):\ m \in M,\ n \in N\}.$$

Binární operaci na množině M jsme definovali jako přiřazení prvku z množini M prvkům z množiny $M \times M$. **Binární relaci** na množině M jsme definovali jako podmnožinu $M \times M$.

Příklady. *Příkladem binárních operací jsou například* $+$ *a* $\cdot$ *(na přirozených, celých, racionálních, reálných číslech apod.). Příkladem relace může být* $=$, *nebo* $<$ *(na stejných množinách).*

Začali jsme diskuzi operací $+$ a $\cdot$ (na přirozených, celých, racionálních, reálných číslech ap.) a jejich různých vlastností:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita $+$)
2. $x + y = y + x$ (komutativita $+$)
3. $x + 0 = x$ (neutralita 0 vzhledem k $+$)
4. existuje $-x$ pro které platí $x + (-x) = 0$ (existence inverzního prvku pro $+$)
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita $\cdot$)
6. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita $\cdot$)
7. $x \cdot 1 = x$ (neutralita 1 vzhledem k $\cdot$)
8. pokud $x \neq 0$, potom existuje x^{-1}, pro které platí $x \cdot x^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku vzhledem k $\cdot$)
9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita)

Příklad. *Pokud operace* $+$ *a* $\cdot$ *na množině* $\{0, 1\}$ *splňují podmínky* $1.-9.$, *potom už nutně*

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

a

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Dostameme tak tzv. těleso $\mathbb{Z}_2$ *(dokončení příkladu bude příště).*