V metrických a normovaných prostorech platí rovněž následující nerovnosti, které známe z $\mathbb{R}$:

$$|\rho(x,y)-\rho(x,z)| \le \rho(y,z), \quad \big|||x||-||y||\big| \le ||x-y||$$

Analogicky k posloupnostem reálných a komplexních čísel definujeme i posloupnosti prvků obecné množiny M, tedy jako zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Definice 1 (limita posloupnosti v metrickém prostoru). *Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z M. Říkáme, že $x \in M$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k metrice ρ (píšeme $\rho - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), pokud platí $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$.*

Alternativně můžeme pochopitelně limitu posloupnosti definovat i známým výrokem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N : \rho(x_n,x) < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady.

1. *Posloupnosti mající limitu podle definice výše budeme nazývat konvergentní (v metrice ρ).*
2. *Limita v metrickém prostoru je určena jednoznačně.*
3. *Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^1,\dots,x_n^d)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x = (x^1,\dots,x^d)$ platí*
$$(\rho - \lim x_n = x) \iff \left(\lim x_n^i = x^i, \quad i = 1,\dots,d\right),$$
pokud ρ je kterákoliv z p-metrik na $\mathbb{R}^d$, $p \in [1,\infty]$.

Pro metriku
$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ 1, & \text{pokud } x \ne y. \end{cases}$$
na M platí a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ platí

$$(\rho - \lim x_n = x) \iff (\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge N : x_n = x).$$

Definice 2 (ekvivalentní normy a metriky). *Říkáme, že dvě metriky ρ a d na množině M jsou ekvivalentní, pokud existuje $C > 0$, že pro každá $x,y \in M$ platí*

$$C\,\rho(x,y) \le d(x,y) \le \frac{1}{C}\,\rho(x,y).$$

Říkáme, že dvě normy $||\cdot||$ a $|||\cdot|||$ na vektorovém prostoru V jsou ekvivalentní, pokud existuje $C > 0$, že pro každé $x \in V$ platí

$$C\,||x|| \le |||x||| \le \frac{1}{C}\,||x||.$$

Například všechny p-metrky (normy) na $\mathbb{R}^d$ jsou (po dvou) ekvivalentní. Rovněž platí, že ekvivivalence metrik (norem) je relací ekvivalence.

Věta 3 (spojitost metriky na normy)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti v M pro které platí $\rho - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\rho - \lim_{n\to\infty} x_n = y$. Potom $\rho - \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.*

Nechť $(V, ||\cdot||)$ je normovaný lineární prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost ve V pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Potom $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||$.

Definice 4 (okolí, otevřené a uzavřené množiny)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Okolí bodu $x \in M$ s poloměrem $\varepsilon > 0$ (v metrice ρ) definujeme jako*

$$U(x, \varepsilon) = \{y \in M : \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Prstencové okolí bodu $x \in M$ s poloměrem $\varepsilon > 0$ (v metrice ρ) pak definujeme jako

$$P(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\} = \{y \in M : 0 < \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Množinu $U \subseteq M$ nazveme otevřenou (vzhledem k ρ), pokud platí

$$\forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\ : U(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Množinu $K \subseteq M$ nazveme uzavřenou (vzhledem k ρ), pokud je množina $M \setminus K$ otevřená (vzhledem k ρ).

Poznámky a příklady.

1. *okolí $U(x, \varepsilon)$ je vždy otevřená množina, uzavřený interval je uzavřená množina (v klasické metrice na $\mathbb{R}$). V metrice*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ 1, & \text{pokud } x \neq y. \end{cases}$$

je každá množina otevřená i uzavřená. V libovolném metrickém prostoru (M, ρ), jsou množiny $\varnothing$ a M uzavřené i otevřené.

2. *Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina: je-li $\{U_a\}$, $a \in A$, systém otevřených množin, je i $\bigcup_{a\in A} U_a$ otevřená množina (ve stejné metrice),*

Konečný průnik otevřených množin je otevřená množina: jsou-li $U_1, \ldots, U_n$ otevřené množiny, je i $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ otevřená množina (ve stejné metrice).

Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina: je-li $\{K_a\}$, $a \in A$, systém uzavřených množin, je i $\bigcap_{a\in A} K_a$ uzavřená množina (ve stejné metrice),

konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina: jsou-li $K_1, \ldots, K_n$ uzavřené množiny, je i $\bigcup_{k=1}^{n} U_k$ uzavřená množina (ve stejné metrice).

Definice 5 (spojitost v metrickém prostoru). *Nechť* (M, ρ) *a* (X, d) *jsou dva metrické prostory,* $\varphi : M \to X$, $a \in M$ *a* $A \subseteq M$, $a \in A$. *Potom říkáme, že* φ *je*

- *spojité v bodě a, pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in U_\rho(x, \delta) : \varphi(x) \in U_d(f(a), \varepsilon).$$

- *spojité v bodě a vzhledem k množině A, pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in U_\rho(x, \delta) \cap A : \varphi(x) \in U_d(f(a), \varepsilon).$$

- *spojité, pokud je spojité ve všech bodech* M,

- *spojité vzhledem k* A, *pokud je ve všech bodech* A *spojité vzhledem k* A.

Věta 6 (charakterizace spojitosti). *Nechť* (M, ρ) *a* (X, d) *jsou dva metrické prostory a* $\varphi : M \to X$. *Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. φ *je spojité,*

2. $\varphi^{-1}(U)$ *je otevřená pro každou* $U \subseteq X$ *otevřenou,*

3. $\varphi^{-1}(K)$ *je uzavřená pro každou* $K \subseteq X$ *uzavřenou.*

Analogické tvrzení ovšem neplatí pro obraz, např. $\arctan x$ je spojitá a $\arctan(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ otevřená a $\sin x$ je spojitá a $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ je uzavřená (připomeňme, že množina $\mathbb{R}$ je (v $\mathbb{R}$) uzavřená i otevřená).

Definice 7 (hromadný a izolovaný bod). *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor,* $A \subset M$. *Bod* $a \in M$ *nazveme hromadným bodem množiny* A, *pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x \in A : x \in U(a, \varepsilon).$$

Bod $a \in A$ *nazveme izolovaným bodem množiny* A, *pokud není jejím hromadným bodem.*