Věta 0.1 (Heineho pro spojitost)**.** *Je-li funkce f definována na $U(a,\delta)$, potom je ekvivalentní*

1. *f je spojitá v a,*
2. *pro každou posloupnost $\{a_n\} \subset D_f \setminus \{a\}$ splňující $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Věta 0.2 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnosti)**.** *Pro posloupnost $\{a_n\}$ je ekvivalentní*

1. *a_n je konvergentní,*
2. *$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N \in \mathbb{N}\,\forall\,m,n \in \mathbb{N},\ n,m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Věta 0.3 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Pro funkci f je ekvivalentní*

1. *f má v a vlastní limitu,*
2. *$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,x,y \in P(a,\delta),: |f(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Definice 0.4 (limes superior a limes inferior)**.** *Definujeme*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \textit{ shora omezená}, \\ +\infty, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \textit{ zdola omezená}, \\ -\infty, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že limity ve výše uvedené definici vždy existují (z důvodu monotonie). Platí $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ a $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$. Rovněž platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \left(\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L\right)$$

Hlubší vlastnosti funkcí

Definice 0.5 (lokální extrémy)**.** *Je li funkce f definována na okolá bodu a, potom říkáme, že f má v bodě a*

- **lokální minimum**, *pokud existuje $\delta > 0$, že platí: $x \in P(a,\delta) \implies f(x) \geq f(a)$,*
- **lokální maximum**, *pokud existuje $\delta > 0$, že platí: $x \in P(a,\delta) \implies f(x) \leq f(a)$,*
- *obdobně definujeme* **ostré lokální minimum** *a* **ostré lokální maximum** *nahrazením příslušné nerovnosti nerovností ostrou.*

Věta 0.6 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Existuje-li* $f'(a)$ *a* f *má v bodě lokální extrém, potom* $f'(a) = 0$.

Definice 0.7 (globální extrémy). *Je li funkce* f *definována na množině* M *(tj.* $M \subseteq D_f$*). Potom říkáme, že* f *má v bodě* $a \in M$

- **globální minimum** *vzhledem k* M*, pokud platí:* $x \in M \setminus \{a\} \implies f(x) \geq f(a)$,
- **globální maximum** *vzhledem k* M*, pokud platí:* $x \in M \setminus \{a\} \implies f(x) \leq f(a)$,
- *obdobně definujeme* **ostré globální minimum** *a* **ostré globální maximum** *nahrazením příslušné nerovnosti nerovností ostrou.*
- *Je-li* $M = D_f$*, pak část "vzhledem k* M*" zpravidla vynecháváme.*

Definice 0.8 (spojitost na intervalu). *Nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, potom říkáme, že* f *je spojitá na* $[a, b]$*, jestliže platí*

- f *je spojitá v každém bodě* $x \in (a, b)$*,*
- f *je zleva (resp. zprava) spojitá v* b *(resp. v* a*).*

Analogicky definujeme funkce spojité na ostatních typech intervalů (tj. (a, b)*,* $[a, b)$ *a* $(a, b]$*).*

Množinu všech funkcí spojitých na intervalu I budeme značit $C(I)$.

Věta 0.9 (existence extrémů na intervalu). *Každá* $f \in C([a, b])$ *nabývá (vzhledem k* $[a, b]$*) globálního maxima i minima.*

Ukázáli jsme si na příkladu funkce $x^3 - x$, $x \in [-1, 2]$, jak s pomocí posledních dvou vět vyšetřovat globální extrémy funkcí a uzavřených intervalech.