

Věta 1 (variacie konstant). *Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (Lh) a nechť funkce $C_1, \dots, C_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ splňují pro $x \in (a, b)$ soustavu*

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Potom funkce $y_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k(x)$ je řešením rovnice (L).

0.1 Rovnice s konstantními koeficienty

Nyní se budeme věnovat otázce, jak najít fundamentální systém pro rovnici (Lh) za předpokladu, že a_n jsou konstantní funkce (toto předpokládáme po zbytek kapitoly).

Základní myšlenka je, že řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, pro takovou funkci totiž platí, že je řešením rovnice (Lh) právě tehdy, když je λ řešením rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Polynomu na levé straně této rovnice se zpravidla říká charakteristický polynom (příslušný rovnici (Lh)). Má-li ale charakteristický polynom vícenásobné nebo komplexní kořeny, není možné z funkcí tvaru $e^{\lambda x}$ sestavit fundamentální systém celý.

V obecném případě hledáme fundamentální systém následovně:

- nejprve najdeme kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0,$$

- za každý reálný kořen λ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x},$$

- za každou dvojici komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \beta i$ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Poznamenejme, že p je stupně n a tedy má včetně násobnosti n kořenů. Rovněž platí, že komplexní kořeny se musí vyskytovat ve dvojici komplexně sdružených čísel stejné násobnosti.

Speciální pravá strana

Máme-li nalezen fundamentální systém rovnice (Lh) můžeme nalézt řešení rovnice (L) pomocí variace konstant. Je-li ale pravá strana ve speciálním tvaru. můžeme (u rovnic s konstantními koeficienty) nalézt řešení následujícím postupem:

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

kde P a Q jsou polynomy. Možné tvary takové pravé strany jsou například

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^{31}, & \text{pro } \alpha = 0, \beta = 0, P(x) = x^{31}, Q(x) = 0 \\ f(x) = (x+1)e^x, & \text{pro } \alpha = 1, \beta = 0, P(x) = x+1, Q(x) = 0 \\ f(x) = (x^2-x)e^{-2x} \sin 4x, & \text{pro } \alpha = -2, \beta = 4, P(x) = 0, Q(x) = x^2-x \end{array}$$

Partikulární řešení y_p pak hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k [R(x) \cos(\beta x) e^{\alpha x} + S(x) \sin(\beta x) e^{\alpha x}],$$

kde $\deg_R, \deg_S \leq \max(\deg_P, \deg_Q)$ a k je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ v charakteristickém polynomu odpovídajícímu levé straně.

Například pro rovnici

$$y'' - 2y' + 2 = (x^2 + 1)e^x \sin x$$

platí

- charakteristický polynom má tvar $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ a kořeny $1 \pm i$,
- fundamentální systém homogenní rovnice tedy bude mít tvar $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$,
- pravá strana má speciální tvar pro

$$\alpha = \beta = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x^2 + 1,$$

násobnost kořenu $\alpha + \beta i$ v charakteristickém polynomu je 1

- partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x [(Ax^2 + Bx + C)e^x \cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^x \sin x].$$