Definice 0.1 (limita posloupnosti). *Říkíme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $L \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \in U(L, \varepsilon)$$

Poznámky a příklady.

1. *Pro funkci $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ (nebo jen definovanou na okolí $+\infty$) můžeme definovat posloupnost $a_n = f(n)$, pak platí $\lim\limits_{x\to+\infty} = L \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Zároveň můžeme (mnoha způsoby) podloupnost rozšířit posloupnost na funkci splňující $f(n)$, čímž můžeme někdy převést tvrzení platná u limit funkcí na limity posloupností.*

   Například jsme si ukázali dva strážníky pro posloupnosti, tedy tvrzení:

   pokud platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro všechna dostatečně velká n a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

   Nebo (což je obvykle snazší) můžeme variantu tvrzení tvrzení pro posloupnosti dokázat takřka identickým způsobemým, jako jsme dokazovali variantu pro funkce. To platí například o aritmetice limit, kterou budeme používat i pro posloupnosti. A stejně tak pro dělení nulou:

   pokud $a_n > 0$ pro všechna dostatečně velká n a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$ (a podobně pro $a_n < 0$ a $-\infty$).

2. *Eulerovo číslo e (které jsme definovali jako $\exp(1)$) se obvykle definuje pomocí limity posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Obecně platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, což by mohl být způsob jak funkci exp definovat (kdybychom uměli limitu spočítat bez využití této funkce). Rovněž to dává vhled do toho, co vůbec funkce e^x znamená.*

3. *(geometrická posloupnost) kombinací známých limit z funkcí (a dvou strážníků) dostaneme* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ 1, & q = 1, \\ 0, & -1 < q < 1. \end{cases}$ *Na případ $q \leq -1$ si ještě počkáme, i když bychom jej mohli snadno vyřešit třeba z definice.*

4. *Bez důkazu jsme si uvedli následující základní limity posloupností:*

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Definice 0.2 (monotonní posloupnost). *Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme*

- **rostoucí**, *pokud $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$,*
- **klesající**, *pokud $a_{n+1} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$,*
- **neklesající**, *pokud $a_{n+1} \geq a_n$, $n \in \mathbb{N}$,*

- **nerostoucí**, *pokud* $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 0.3 (omezená posloupnost)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}$ *nazveme*

- **shora omezenou**, *pokud existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $a_n \leq C$, $n \in \mathbb{R}$
- **zdola omezenou**, *pokud existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $a_n \geq C$, $n \in \mathbb{R}$
- **omezenou**, *pokud je shora i zdola omezená (tj. existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $|a_n| \leq C$, $n \in \mathbb{R}$*).*

Věta 0.4 (limita monotonní posloupnosti)**.** *Platí*

1. *Každá monotonní posloupnost má limitu.*
2. *Každá shora omezená neklesající (nebo zdola omezená nerostoucí) posloupnost konverguje.*

Tato věta má rozličené teoretické i praktické důsledky, například často pomůže při výpočtu limit rekurentně zadaných posloupností, což jsme ilustrovali na Fibonacciho posloupnosti $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n > 1$, $a_1 = a_2 = 1$.

Vraťme se ještě ke geometrické posloupnosti pro $q \leq -1$, např. pro $q = -1$ má tvar $-1, 1, -1, 1, \ldots.$ Vidíme že obsahuje dvě posloupnosti $-1, -1, -1, \ldots$ (liché členy) a $1, 1, 1, \ldots$ (sudé členy), které zřejmě limitu mají.

Definice 0.5 (vybraná posloupnost)**.** *Říkáme, že posloupnost* $\{b_k\}$ *je* **vybraná posloupnost** *(podposloupnost) z posloupnosti* a_n, *pokud existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel* n_k *taková, že* $b_k = a_{n_k}$ *(můžeme si ji tedy představovat jako složenou funkci, vnitřní funkce je* $k \mapsto n_k$ *a vnější* $n \mapsto a_n$*).*

Protože pro $\{n_k\}$ jako v definici výše vždy platí $n_k \geq k$ dostaneme přímo z definice limity posloupnosti, že $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \implies \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = L$. Z toho pak například okamžitě vidíme, že $\{q^n\}$ pro $q \leq -1$ nemůže mít limitu, protože liché a sudé členy mají sice limity, ale různé (a limita je určena jednoznačně).

Věta 0.6 (Bolzano-Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta 0.7 (Heineho)**.** *Je-li funkce* f *definována na* $P(a, \delta)$, *potom je ekvivalentní*

1. $\lim\limits_{x\to a} = L$,
2. *pro každou posloupnost* $\{a_n\} \subset D_f \setminus \{a\}$ *splňující* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = L$.