Derivace

Definice 0.1. *Derivaci funkce f v bodě a definujeme jako hodnotu*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

pokud limita napravo existuje. Podobně definujeme derivaci zleva, resp. zprava, jako

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \textit{resp.} \quad f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Poznámky a příklady. *1. Platí*

$$(f'(a) = L) \iff ((f'_-(a) = L) \wedge (f'_-(a) = L)).$$

2. Obvykle používáme (nepřesný) zápis typu

$$(x)',\ (x^2)',\ (\sin x)',\ (e^x)',\ \textit{apod.}$$

3.
- $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$ *a obecně* $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$, $x > 0$
- $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
- $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 0.2 (derivace a spojitost)**.** *Pokud existuje $f'(a)$ (vlastní) potom je f spojitá v a.*

Věta 0.3 (derivace $f+g$, fg a $\frac{f}{g}$)**.** *Platí*

1. $(f+g)' = f' + g'$,
2. $(fg)' = f'g + fg'$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

kdykoliv má pravá strana smysl.

Věta 0.4 (derivace složené funkce)**.** *Pokud existují $g'(f(a))$ a $f'(a)$, potom existuje i $(g\circ f)'(a) = f'(a)\cdot g'(f(a))$*

- $(\mathrm{tg})' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (zde jsme využili $(\cos x)' = -\sin x$),
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$,
- (na rozmyšlenou) $(\sinh x)'$ a $(\cosh x)'$