Definice 1 (Taylorův polynom)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená, $N \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^N(U)$, $a \in U$. Taylorovým polynomem funkce f v bodě a stupně N budeme nazývat polynom*

$$T^N_{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} D^\alpha_f(a)(x-a)^\alpha.$$

Věta 2 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená, $N \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^N(U)$, $a \in U$, potom platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^N_{f,a}(x)}{|x-a|^N} = 0.$$

Lemma 3. *Nechť A je symetrická pozitivně definitní matice, potom existuje $\alpha > 0$, že $x^T A x \geq \alpha |x|^2$.*

Věta 4 (postačující podmínka pro lokální extrém)**.** *Nechť $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(U)$, $a \in U$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:*

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém.*

Definice 5 (extrémy vzhledem k množině)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$, $M \subset D_f$, $a \in M$. Potom říkáme, že f má v bodě a*

- *lokální maximum vzhledem k množině M, pokud existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$,*
- *globální maximum vzhledem k množině M, pokud pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.*

Analogicky definujeme i lokální a globální minimum f vzhledem k M a ostré varianty.

Věta 6 (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $n, d \in \mathbb{N}$, $n < d$, $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \ldots, g_n \in C^1(U)$. Položme $G = (g_1, \ldots, g_n)$ a*

$$M = \{x \in G : G(x) = 0\}.$$

Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *vektory $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(a).$$