Zkusíme nalézt řešení rovnice $y'' = y$ ve tvaru mocninné řady. Předpokládejme, že $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potom

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Protože dvě mocninné řady se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty, bude y řešením rovnice právě tehdy, když bude platit

$$a_{n-2} = n(n-1)a_n, \quad n \geq 2.$$

Opakovaným využitím tohoto vztahu dostaneme podmínky

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!} \quad \text{a} \quad a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}. \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hodnoty a_0 a a_1 pak odpovídají počáteční podmínce

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1.$$

Volbou $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$ dostaneme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{argcosh} x,$$

volbou $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$ dostaneme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{argsinh} x.$$

Mocninné (Taylorovy) řady můžeme rovněž počítat pomocí pravidel, která známe z výpočtu Taylorových polynomů.

- $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$
- $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$

1 Alternativní sčítací metody

Definice součtu nekonečné řady pomocí limity částečných součtů nemusí vždy vyhovovat našim potřebám. Existuje mnoho dalších způsobů, jak součet řady definovat a využívají se rovněž různé axiomatické přístupy, například můžeme požadovat platnost následujících axiomů

(N1) $(N)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha(N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta(N)\sum_{n=0}^{\infty} b_n,$

(N2) $(N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + (N)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}.$

Z těchto axiomů například dostaneme

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + (N)\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1 + x(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

což dává

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

za předpokladu, že $(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je dobře definována a vlastní. Zpravidla také požadujeme, aby platilo

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

pokud řada konverguje v klasickém smyslu. Ukázali jsme si dvě metody, které tuto podmínku i oba axiomy (N1) a (N2) splňují (existují ale široce užívané sčítací metody, které například nesplňují axiom (N2)).

První byla Cesarovská sčítatelnost, kde definujeme

$$(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots s_n}{n+1},$$

pokud je limita napravo vlastní, Místo limity částečných součtů s_n tedy používáme limitu jejich aritmetických půměru (tzv. Cesarovskou limitu). Pomocí této metody jsme spočítali

$$(C)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$$

Druhá byla Abelovská sčítatalnost, kde definujeme

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right),$$

pokud je limita napravo vlastní. Tuto limitu známe z Abelovy věty.

Jako příklad jsme spočítali

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} n = \frac{1}{4}.$$

Rovněř jsem si ukázali, že tato řada není Cesarovsky sčítatelná (byla by ale sčítatelné Cesarovskou metodou druhého řádu, kde bychom počítali limitu aritmetických půměrů z aritmetických půměrů).

2 Metrické prostory

Definice 1 (Metrický prostor)**.** *Metrickým prostorem nazýváme dvojici* (M, ρ), *kde* M *je množina a* $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ *je zobrazení (tzv. metrika) spňující pro* $x, y, z \in M$*:*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Na množině $\mathbb{R}$ máme například metriky

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad \text{nebo} \quad \rho(x, y) = \arctan|x - y| \tag{1}$$

obdobně můžeme vybavit množinu $\mathbb{R}^d$ metrikami

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{d} (x_n - y_n)^2}, \quad \text{nebo} \quad \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{d} |x_n - y_n|, \tag{2}$$

které jsou speciálními případy metrik

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{d} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \tag{3}$$

případně metrikou

$$\rho(x, y) = \max_{n=1,\dots,d} |x_n - y_n|, \tag{4}$$

která bývá často chápána jako limitní případ metrik v (3) pro $p = \infty$. Podobné metriky zavádíme i na prostorech posloupností

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \tag{5}$$

na prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ pro které platí $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, případně

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|, \tag{6}$$

na prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ pro které platí $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$ (tj. omezených posloupností).

Rovněž prostor $C([a, b])$ můžeme vybavit metrikami podobného typu

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{resp.} \quad \rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|. \tag{7}$$

Obecně rovněž platí, že libovolnou množinu můžeme vybavit metrikou (tzv. ultrametrikou)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ 1, & \text{pokud } x \neq y. \end{cases} \tag{8}$$

Definice 2 (normovaný lineární prostor)**.** *Normovaným lineárním prostorem nazýváme dvojici $(V, ||\cdot||)$, kde V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ je zobrazení spňující pro $x, y \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) podmínky*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0 \in V$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Je-li $||\cdot||$ norma na V, potom $\rho(x,y) := ||x-y||$ je metrika na V (indukovaná normou $||\cdot||$). Příkladem takových metrik jsou všechny předchozí příklady mimo druhé metriky v (1) a ultrametriky v (8).

Je-li navíc V vektorový prostor vybavený skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, můžeme vždy definovat normu na V jako $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. To je například případ metrik (3), (5) a (7) pro $p = 2$.