Věta 0.1 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť platí* $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$, *nebo* $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. *Nechť dále* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. *Potom* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidala pak už snadno dostaneme, že platí $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Podobně spočítáme následující důležité limity

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad a > 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = +\infty, \quad \alpha > 0,$$

nebo v reformulaci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0,$$

a $\lim_{x\to 0+} x \log x = 0$. Ty pak v kombinaci s aritmetikou limit umožňují spočítat mnoho limit typu $\frac{\infty}{\infty}$ a $\frac{0}{0}$, např. (základním trikem je vytknout nejrychlejší člen ze jmenovatele):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7 + 4^x + \log x}{10x^{334} + 7^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^7}{7^x} + \frac{4^x}{7^x} + \frac{\log x}{7^x}}{\frac{10x^{334}}{7^x} + 1} = \frac{0+0+0}{0+1} = 0.$$

Všechno tohle budeme chtít ještě trochu více formalizovat, což nás dovede k následující kapitole.

Asymptotické porovnávání funkcí

Definujeme následující symboly označující asymptotické vztahy funkcí

- $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ($f(x)$ je malé o $g(x)$ pro x jdoucí k a),
- $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, pokud $|f(x)| \le C|g(x)|$, pro nějaké $\delta, C > 0$ a všechna $x \in P(a, \delta)$, ($f(x)$ je velké o $g(x)$ pro x jdoucí k a),
- $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ($f(x)$ a $g(x)$ jsou asymptoticky ekvivalentní pro x jdoucí k a)

Poznámky a příklady. *1. Při psaní výše uvedených často vynecháváme proměnnou x (třeba píšeme $f \sim g$, $x \to a$). Někdy se rovněž místo $f = O(g)$ píše $f \ll g$ a $f \sim g$ se někdy používá pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - tzv. slabá ekvivalence, a pro $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ se používá $f \simeq g$ - tzv. silná ekvivalence.*

2. *pokud* $f = o(g)$, $x \to a$, *potom* $f = O(g)$, $x \to a$ *(důsledek věty limita a omezenost),*

3. *pokud* $f = O(g)$ *a* $g = O(h)$, *potom* $f = O(h)$ *(vše* $x \to a$*),*

4. *pokud* $f_1 \sim g_1$ *a* $f_2 \sim g_2$, *potom* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, *a* $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$, *vše* $x \to a$ *(nikoliv však* $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$*),*

5. $f \sim g$ *je relace ekvivalence*

6. $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $2(1 - \cos x) \sim x^2$ *(vše* $x \to 0$*)*

7. $x^\alpha = o(a^x)$, $x \to +\infty$, $a > 1$, $\log x = o(x^\alpha)$, $x \to +\infty$, $\alpha > 0$

8. *(důležitý) pro* $T(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$ *(tečna k* f *v* a*) platí* $f(x)-T(x) = o(x-a)$.

Číselné posloupnosti

Definice 0.2 (číselná posloupnost)**.** *Pospoupností budeme nazývat zobrazení* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. *Místo* f *zpravidla píšeme* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(tedy* $a_n = f(n)$*).*

Příkladem posloupnosti může být třeba geometrická posloupnost $\{q^n\}$, která je ekvivalentem exponenciálné funkce.

Nebudeme (především při výpočtu limit) trvat na tom, aby byla posloupnost definována pro všechna $n \in \mathbb{N}$, stačí, aby byla definována pro všechna dostatečně velká n (podobně, jako u limit funkcí požadujeme pouze, aby funkce byla definována na prstencovém okolí). Např. $\{\frac{1}{n(n-2)}\}$ budeme brát jako posloupnost, i když není definována pro $n = 2$.

Definice 0.3 (limita posloupnosti)**.** *Říkíme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* $L \in \mathbb{R}^*$ *(píšeme* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$*), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \in U(L, \varepsilon)$$

Poznámky a příklady. *1. Pro funkci* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *(nebo jen definovanou na okolí* $+\infty$*) můžeme definovat posloupnost* $a_n = f(n)$, *pak platí* $\lim\limits_{x\to+\infty} = L \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. *Zároveň můžeme (mnoha způsoby) podloupnost rozšířit posloupnost na funkci splňující* $f(n)$, *čímž můžeme někdy převést tvrzení platná u limit funkcí na limity posloupností.*

Například jsme si ukázali dva strážníky pro posloupnosti, tedy tvrzení:

pokud platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro všechna dostatečně velká* n *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$, *potom* $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Nebo (což je obvykle snazší) můžeme varantu tvrzení tvrzení pro posloupnosti dokázat takřka identickým způsobemým, jako jsme dokazovali variantu pro funkce. To platí například o aritmetice limit, kterou budeme používat i pro posloupnosti. A stejně tak pro dělení nulou:

pokud $a_n > 0$ *pro všechna dostatečně velká* n *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*, potom* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$ *(a podobně pro* $a_n < 0$ *a* $-\infty$*).*

2. *Eulerovo číslo* e *(které jsme definovali jako* $\exp(1)$*) se obvykle definuje pomocí limity posloupnosti* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.