Věta 0.1 (limita složené funkce)**.** *Nechť platí* $\lim_{x\to A} f(x) = B$ *a* $\lim_{x\to B} g(x) = C$. *Předpokládejme navíc, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

(S) g *je spojitá v bodě* B,

(P) $\exists\delta > 0\ \forall x \in P(A,\delta) : f(x) \neq B$.

Potom $\lim_{x\to A} g\circ f(x) = C$.

Tzv. známé limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Z nich pak lze odvodit další tzv. známé limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = 1, \quad \left(\text{alternativně} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1\right)$$

Definice 0.2 (jednostranné okolí)**.** *Pro* $a \in \mathbb{R}$ *a* $\delta > 0$ *definujeme* ***levé a pravé okolí*** *bodu* a *s poloměrem* δ *jako*

$$U_-(a,\delta) = (a-\delta, a], \quad U_+(a,\delta) = [a, a+\delta).$$

Rovněž definujeme ***levé a pravé prstencové okolí*** *bodu* a *s poloměrem* δ *jako*

$$P_-(a,\delta) = (a-\delta, a), \quad P_+(a,\delta) = (a, a+\delta).$$

Definice 0.3 (jednostranná spojitost a limita funkce)**.** *Říkáme, že* f *je* ***zleva, resp. zprava spojitá*** *v bodě* a, *pokud platí následující výroky:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in U_-(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in U_+(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon).$$

Říkáme, že f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *(jednostranou)* ***limitu*** $L \in \mathbb{R}$ ***zleva, resp. zprava****, (píšeme* $\lim_{x\to a-} f(x) = L$*, resp.* $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ *), pokud platí*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_-(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_+(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

Poznámky a příklady. *1. Pro práci s jednostrannými limitami platí stejná pravidla jako pro (oboustranné) limity (poznámky (1)-(4) a aritmetika limit)*

2. *Platí* $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) \iff \left[\left(\lim\limits_{x\to a-} f(x)\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to a+} f(x)\right)\right]$.

3. *Pro funkci*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

   platí $\lim\limits_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn} x = \pm 1$, *speciálně, oboustranná limita neexistuje.*

4. $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\sqrt{x^2+x^4}}{x} = \pm 1.$

Derivace

zatím nic moc