0.0.1 Lineární rovnice 1. řádu

Lineární rovnicí 1. řádu budeme nazývat rovnici

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{L1}$$

kde a a b jsou spojité funkce nanějakém intervalu (α, β). Následující věta dává návod, jak u rovnice (L1) nalézt obecné řešení.

Věta 1 (řešení rovnice (L1))**.** *Nechť*

- *A je primitivní funkce k funkce a na (α, β),*
- *B je primitivní funkce k funkce be^A na (α, β).*

Potom y je obecné řešení rovnice (L1) *na intervalu (α, β) právě tehdy, když existuje $C \in \mathbb{R}$, že*

$$y = Be^{-A} + Ce^{-A}.$$

Pokud bychom hledali řešení splňující pro nějaká $x_0 \in (\alpha, \beta)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ stačí zvolit A, B a C ve větě jako

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt, \quad B(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt \quad \text{a} \quad C = y_0.$$

0.0.2 Lineární rovnice obecného řádu

Budeme uvažovat rovnice ve tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{L}$$

kde $f, a_0, \ldots a_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $a_n(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

Takovou rovnici vždy můžeme upravit do tvaru vyřešeného vzhledem k n-té derivaci (proměnnou x už budeme zpravidla vynechávat)

$$f^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} y^k.$$

To například okamžitě implikuje, že každé řešení y musí být nejen diferencovatelné, ale musí mít i spojitou derivaci řádu n. V tomto ohledu se nám bude hodit i následující značení (analogické ke značení $C((a, b))$): pro $n \in \mathbb{N}$ budeme označovat

$$C^n((a, b)) = \{f : (a, b) \to \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ je spojitá na } (a, b)\}.$$

Množina $C^n((a, b))$ (stejně jako $C((a, b))$) tvoří (s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce konstantou) vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Homogenní (lineární) rovnice

Začneme s případem, kde je pravá strana rovnice (L) (funkce f) identicky rovna 0, tj. s rovnicí ve tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{Lh}$$

Zde (díky linearitě rovnice) platí, že množina všech řešení (Lh) na (a,b) tvoří podprostor vektorového prostoru $C^n((a,b))$. Při studiu těchto rovnic využijeme následující obecnou větu, jejíž důkaz zatím odložíme

Věta 2 (existence a jednoznačnost řešení rovnice (L))**.** *Nechť $f, a_0, \ldots, a_n \in C((a,b))$, $a_n \neq 0$ na (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje právě jedno řešení y rovnice* (L) *na (a,b), pro které platí*

$$y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

První informací o prostoru řešení rovnice (Lh) bude následující věta

Věta 3 (prostor řešení rovnice (Lh))**.** *Dimenze prostoru všech řešení rovnice* (Lh) *(na intervalu (a,b)) je n.*

Definice 4. *Libovolonou bázi prostoru řešení rovnice* (Lh) *budeme nazývat fundamentálním systémem rovnice* (Lh).

Při studiu prostoru řešení rovnice (Lh) (a rovněž (L)) nám pomůže následující pojem:

Definice 5 (Wronského determinant)**.** *Pro $u_1, \ldots, u_n \in C^{n-1}((a,b))$ a $x \in (a,b)$ definujeme Wronského determinant (Wronskián) jako*

$$W(x) = W_{u_1,\ldots,u_n}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x), & \cdots, & u_n(x) \\ u_1'(x), & \cdots, & u_n'(x) \\ \vdots, & \ddots, & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Věta 6 (vlastnosti Wronskiánu)**.** *Nechť $u_1, \ldots, u_n \in C^n((a,b))$ jsou řešení rovnice* (Lh)*, potom $W'(x) = -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x)$, $x \in (a,b)$.*

Poznámky a příklady. *1. Wronskián tedy, za předpokladu, že $u_1, \ldots, u_n$ jsou řeeními rovnice* (Lh)*, splňuje jednoduchou lineární diferenciální rovnici* 1. *řádu, kterou snadno vyřešíme. Je-li $x_0 \in (a,b)$ potom platí*

$$W(x) = W(x_0)e^{A(x)}, \quad kde \quad A(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, dt. \tag{1}$$

Speciálně dostáváme, že v tomto případě platí

$$\exists\, x \in (a,b) : W(x) = 0 \iff \forall\, x \in (a,b) : W(x) = 0.$$

Poslední vzorec nám rovněž dává metodu snižování řádu v následujícím smyslu: uvažme rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{2}$$

Snadno uhádneme, že funkce e^x je jejím řešením. Víme, že musí existovat další lineárně nezávislé řešení. To už ale hádat nemusíme, stačí si uvědomit, že Wronskián můžeme spočítat dvěma způsoby. Jednak z definice (je-li y řešení (2))

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x, & y \\ (e^x)', & y' \end{pmatrix} = e^x(y' - y),$$

a druhak pomocí (1), což dává, že existuje $C \in \mathbb{R}$, že

$$W(x) = Ce^{2x}.$$

Porovnáním dostaneme, že

$$y' - y = Ce^x.$$

To je rovnice 1. řádu, kterou snadno vyřešíme, její obecné řešení má tvar

$$y = Dxe^x + Ce^x.$$

Odtud už pak snadno odvodíme, že fundamentální systém rovnice je např. $\{e^x, xe^x\}$.

Věta 7 (lineární nezávislost a Wronskián)**.** *Nechť $u_1, \dots, u_n \in C^n((a,b))$ jsou řešení rovnice* (Lh)*, potom $\{u_1, \dots, u_n\}$ je fundamentálním systémem rovnice* (Lh) *právě tehdy, když existuje $x \in (a,b)$, že $W(x) \neq 0$.*

0.1 Nehomogenní rovnice - variace konstant

Nechť y_p je řešení rovnice (L) (na (a,b)), potom obecné řešení rovnice (L) (na (a,b)) má tvar

$$y = y_p + y_h,$$

kde y_h je obecné řešení rovnice (Lh). Metoda variace konstant znamená, že hladáme řešení y_p ve tvaru

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (Lh).