Limity podruhé

Definice 0.1 (okolí $\pm\infty$)**.** *Pro $\varepsilon > 0$ definujeme okolí a prstencové okolí $\pm\infty$ jako*

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty) = P(+\infty, \varepsilon)$$

a

$$U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}) = P(-\infty, \varepsilon)$$

Definice 0.2 (limita funkce - plná verze)**.** *Nechť $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ potom říkáme, že f má v a limitu L (zn. $\lim_{x\to a} f(x) = L$) pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme jednostranné limity.

Poznámky a příklady. 1. *I po tomto rozšíření o nevlastní limity platí většina poznatků, které o limitách funkcí už známe (hlavně jednoznačnost a limita složené funkce). Ohledně aritmeriky limit uvidíme později a stejně ohledně věty o dvou strážnících.*

2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty$, *zde jsme využili, že exp a log jsou rostoucí a na.*

Budeme používat následující značení

$$\lim_{x\to a} f(x) = L+ \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in P_+(L, \varepsilon)$$

a

$$\lim_{x\to a} f(x) = L- \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in P_-(L, \varepsilon)$$

Například $\lim_{x\to 0} \pm x^2 = 0\pm$. Platí následující

Věta 0.3 (výpočet nevlastních limit)**.** *Platí*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0\pm$

2. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0\pm} f(\tfrac{1}{x}) = L$

Například $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ (protože $\lim_{x\to 0} |x| = 0+$). Analogické tvrzení platí i pro jednostranné limity, což dává $\lim_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.

Věta 0.4 (o jednom strážníkovi)**.** *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) a $g > f$ na $P(a, \Delta)$ (resp. $g < f$ na $P(a, \Delta)$). Potom $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$).*

Věta 0.5 (nekonečno a omezenost)**.** *Platí*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *a* $g > C$ *na* $P(a, \Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *a* $g < C$ *na* $P(a, \Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *a* $g > C > 0$ *na* $P(a, \Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *a* $g < C < 0$ *na* $P(a, \Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \mp\infty$

Definice 0.6 (rozšířená reálná osa)**.** *Množinu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *nazýváme rozšířenou reálnou osou. Pro prvky* $+\infty$ *a* $-\infty$ *navíc předpokládáme následující vlastnosti:*

1. *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $-\infty < x < +\infty$*,*
2. $|\pm\infty| = +\infty$*,*
3. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$*,* $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = +\infty$*,* $\pm\infty \cdot (\mp\infty) = -\infty$*,*
4. *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $-\infty + x = -\infty$ *a* $+\infty + x = +\infty$*,*
5. *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí, pokud* $x > 0$ *potom* $\pm\infty \cdot x = \pm\infty$*, pokud* $x < 0$ $\pm\infty \cdot x = \mp\infty$*,*
6. *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$.

Poznamenejme, že tzv. neurčité výrazy $-\infty + (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $0 \cdot \pm\infty$ a $\pm\infty \cdot 0$ nejsou definovány.

Věta 0.7 (aritmetika limit - plná verze)**.** *Je-li* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$*, potom:*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = A + B$*,*
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$*,*
3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$*,*

pokud má odpovídající výraz na pravé straně smysl.

Stále ještě ale neumíme počítat limity typu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a $\frac{0}{0}$. Např. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, zde musíme porovnávat jak rychle které funkce jde do $+\infty$. Na to se nám bude hodit následující (nechvalně známá) metoda výpočtu limit:

Věta 0.8 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť platí* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$*, nebo* $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$*. Nechť dále* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*. Potom* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidala pak už snadno dostaneme, že platí $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.