

Lemma 0.1 (limita a omezenost). Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, potom

1. $\exists C > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : |f(x)| < C$,

2. pokud $L \neq 0$ potom $\exists D > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : \frac{1}{|f(x)|} < D$,

Věta 0.2 (aritmetika limit - verze 1). Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, potom:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$,

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,

3. pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Důsledek 0.3 (aritmetika spojitosti). Nechť f a g jsou spojité v bodě a , potom i funkce $f + g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v a . Je-li navíc $g(a) \neq 0$ potom je v a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Příklady. Jsou-li P a Q polynomy, potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

za předpokladu, že a není kořenem Q . Speciálně platí, že (racionální) funkce $\frac{P}{Q}$ je spojitá ve všech bodech \mathbb{R} kromě kořenů Q .

Jak ale například spočítat limitu $\lim_{x \rightarrow a} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$? Jde sice o součin, ale aritmetiku limit nelze použít.

Věta 0.4 (o dvou strážnících). Nechť pro funkce f , g a h platí následující podmínky:

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$,
- $\exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Příklad. Limitu z předchozího příkladu už teď spočítáme snadno, platí totiž

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a protože $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ dostáváme, že $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

Později v průběhu semestru si ukážeme, že platí limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (a ještě mnohem později, že funkce \sin existuje). Co kdybychom ale chtěli spočítat limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$, kde f je funkce z minulého příkladu?

Věta 0.5 (limita složené funkce). *Nechť platí $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ a $\lim_{x \rightarrow B} g(x) = C$. Předpokládejme navíc, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

(S) *g je spojitá v bodě B ,*

(P) $\exists \delta > 0 \forall x \in P(A, \delta) : f(x) \neq B$.

Potom $\lim_{x \rightarrow A} g \circ f(x) = C$.