Na závěr se ještě podíváme na výpočet Taylorových polynomů, mějme dvě funkce f a g a jejich Taylorovy polynomy 2. stupně v bodě a:

$$T^2_{a,f}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad \text{a} \quad T^2_{a,g}(x) = g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Potom

$$\begin{aligned}
T^2_{a,f}(x)\cdot T^2_{a,g}(x) &= (f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2)\cdot(g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2)\\
&= f(a)g(a) + (f(a)g'(a)+f'(a)g(a))(x-a)\\
&+ \frac{f(a)g''(a)+2f(a)g(a)+f''(a)g(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)\\
&= (f\cdot g)(a) + (f\cdot g)'(a)(x-a) + \frac{(f\cdot g)''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)\\
&= T^2_{a,f\cdot g}(x) + o((x-a)^2).
\end{aligned}$$

Ve členu $o((x-a)^2)$ (všude bereme $x \to a$) se schovaly všechny mocniny $(x-a)^k$ pro $k > 2$. Polynom $T^2_{a,f\cdot g}(x)$ tedy dostaneme vynásobením $T^2_{a,f}(x)$ a $T^2_{a,g}(x)$ a škrtnutím všech mocnin $(x-a)^k$ pro $k > 2$. Postup funguje obecně, tj.

$$T^n_{a,f}(x)\cdot T^n_{a,g}(x) = T^n_{a,f\cdot g}(x) + o((x-a)^n).$$

Podobně můžeme postupovat o pro složení $g\circ f$, kde dostaneme

$$T^n_{f(a),g}\circ T^n_{a,f} = T^n_{a,g\circ f} + o((x-a)^n).$$

Například jsme spočítali

$$T^6_{0,\sin^4 x}(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^6 \quad \text{a} \quad T^4_{0,e^{x^4}} = 1 + x^4.$$

Odtud třeba snadno vidíme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x}{e^{x^4}-1} = 1$.

Určité integrály

Definice 1. *Říkáme, že funkce f je omezená na množině $M \subset D_f$, pokud je množina $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$ omezená. Podobně definujeme shora a zdola omezené funkce.*

Definice 2 (dělení intervalu)**.** *Buď $[a,b]$ interval, $-\infty < a < b < \infty$, uspořádanou $(n+1)$-tici bodů $x_0,\dots,x_n$ nazveme* **dělením intervalu** *$[a,b]$ pokud $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body x_i nazýváme dělícími body dělení D. Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathfrak{D}([a,b])$.*

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}([a,b])$, potom budeme značit

$$\begin{aligned}
m_k^D &= \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) =: \inf\{f(x) : x \in [x_k,x_{k+1}]\},\\
M_k^D &= \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) =: \sup\{f(x) : x \in [x_k,x_{k+1}]\}.
\end{aligned}$$

Horní index D budeme, nebude-li hrozit nedorozumění, zpravidla vynechávat Rovněž budeme definovat $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Definice 3 (horní a dolní součty)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$ a $D \in \mathfrak{D}([a,b])$. Definujeme* **horní a dolní** *(riemannovské)* **součty** *funkce f vzhledem k dělení D jako*

$$S(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^D \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

a

$$s(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k^D \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Základním typem dělení je takzvané **ekvidistantní dělení**, kdy interval $[a,b]$ rozdělíme na n intervalů délky $\dfrac{b-a}{n}$, v tom případě máme $x_k = a + \dfrac{k}{n}(b-a)$, $k = 0,\dots n$. Zvažme například funkci $f(x) = x$ na intervalu $[0,1]$, ekvidistantní dělení má v tomto případě tvar $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0,\dots,n$. Dále máme $m_k = f(x_k) = \frac{k}{n}$ a $M_k = x_{k+1} = \frac{k+1}{n}$, $k = 0,\dots,n-1$. Odtud dostaneme

$$s(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2}$$

a

$$S(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

Definice 4 (Riemannův integrál)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$, definujeme* **horní Riemannův integrál** *funkce f od a do b jako*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,D) : D \in \mathfrak{D}([a,b])\}.$$

a **dolní Riemannův integrál** *funkce f od a do b jako*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,D) : D \in \mathfrak{D}([a,b])\}$$

Pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ říkáme, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$ (značíme $f \in \mathfrak{R}([a,b])$). Společnou hodnotu pak nazýváme **Riemannovým integrálem** *funkce f od a do b a značíme*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Budeme li pokračovat v příkladu výše, dostáváme (pro ekvidistantní dělení) pro $n \to \infty$

$$s(f,D) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad S(f,D) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Tedy $\underline{\int_0^1} f \geq \frac{1}{2} \geq \overline{\int_0^1} f$. Rovněž máme

$$s(f,D) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad S(f,D) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Tedy speciálně $s(f,D) \leq \frac{1}{2} \leq S(f,D)$ (pro ekvidistantní dělení i při různém počtu dělících bodů). Pokud by nerovnost $s(f,D) \leq S(f,D')$ platila pro libovolnou dvojici dělení D a D', pak bychom už dostali rovnost $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \frac{1}{2}$ a tedy i existenci Reimannova integrálu (s hodnotou $\frac{1}{2}$).