Věta 1 (poloměr konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je mocninná řada a* $z \in \mathbb{C}$. *Položme* $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ *(s konvencí* $\frac{1}{\infty} = 0$ *a* $\frac{1}{0} = \infty$*). Potom*

1. *pokud* $|z - z_0| < R$, *potom (číselná) řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konverguje absolutně,*
2. *pokud* $|z - z_0| > R$, *potom (číselná) řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *diverguje (řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence).*

Poznámky a příklady.

1. *Hodnotě* R *z předchozí věty říkáme poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. *Podmínky* (1) *a* (2) *určují poloměr konvergence jednoznačně.*
2. *Pokud existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *potom je její hodnota rovna poloměru konvergence.*
3. *Pro řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *platí* $R = 1$, *pro řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ *platí* $R = \infty$.

Věta 2 (derivace mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* R. *Pro* $x \in (-R, R)$ *položme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Potom pro $x \in (-R, R)$ *existuje vlastní* $f'(x)$ *a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Navíc platí, že mocninná řada napravo má poloměr konvergence R.

Poznámky a příklady.

1. *Větu můžeme aplikovat opakovaně, čímž speciálně dostaneme, že řada* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *definuje na intervalu* $(-R, R)$ *nekonečněkrát (spojitě) diferencovatelnou funkci.*

2. *Pro* $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, *platí*

$$(\exp(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x).$$

Protože $\exp(0) = 0$, *dostáváme speciálně*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Tím jsme konečně dokončili důkaz existence a jednoznačnosti exponenciální funkce.

3. *(integrace mocninné řady) Věta má i svou integrální verzi: pokud* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, *potom*

$$\int f \stackrel{c}{=} g \quad \text{na } (-R, R).$$

4. *(verze pro určitý integrál) Pro* $-R < a < b < R$ *platí (pro Newtonův i Riemannův integrál)*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

5. *Větu často používáme ke sčítání číselných řad. Například snadno ověříme, že pro* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

a tedy

$$f(x) \stackrel{c}{=} -\log(1-x), \quad |x| < 1.$$

Porovnáním hodnot v bodě 0 ($f(0) = 0$ *a* $-\log(1-0) = 0$) *pak dostaneme integrační konstantu rovnu nule a platí* $f(x) = -\log(1-x)$, $|x| < 1$. *Tedy například pro číselnou řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$ *dostaneme součet* $-\log(\frac{5}{4})$.

Je pozoruhodné, že ačkoliv je výsledná fukce $-\log(1-x)$ *definována v bodě* -1 *a mocninná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *rovněž konverguje v bodě* -1 *(podle Leibnizova kritéria), nemůžeme podle věty usoudit, že platí* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

Tato rovnost ovšem skutečně platí a je důsledkem následujícího tvrzení známého jako Abelova věta: nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Potom platí*

(a) pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$*, potom platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(b) pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$*, potom platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \to R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

6. *Pro* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Dosazením $x = 0$ *dostaneme* $f^{(k)}(0) = k! a_k$*, tedy rovněž platí* $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ *a dostáváme koeficienty, které dobře známe z Taylorových polynomů. Platí tedy, že funkce zadaná mocninnou řadou je v kruhu konvergence součtem tzv. Taylorovy řady (se stejným středem), ve smyslu následující definice.*

Definice 3 (Taylorova řada)**.** *Nechť f je funkce, která je nekonečněkrát diferencovatelná v bodě* x_0*. Porom definujeme její Taylorovu řadu se středem v bodě* x_0 *jako*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Obecně neplatí, že by funkce měla být součtem své mocninné řady (i když tato konverguje) kdekoliv mimo střed x_0. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

splňuje $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a tedy příslušná Taylorova řada se středem v bodě 0 konverguje na $\mathbb{R}$ k hodnotě 0, nicméně $f(x) \neq 0$, $x \neq 0$.

Taylorovy řady nemusíme nutně počítat z definice, ale čato můžeme využít naše poznatky z teorie mocninných řad (na základě výše uvedené poznámky), například pro funkci $f(x) = \arctan x$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

a tedy (po určení integrační konstanty)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Mocninná řada napravo je pak už nutně Taylorovou řadou funkce $\arctan x$ se středem v bodě 0.

Definice 4 (reálně analytická funkce)**.** *Říkáme, že funkce f definovaná na otevřeném intervalu I je reálně analytická (na I), pokud pro každé $x_0 \in I$ existuje $\delta > 0$, že f je součtem své Taylorovy řady se středem v bodě x_0 na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Například funkce $\log x$ je reálně analytickou funkcí na intervalu $(0, \infty)$. Její Taylorovu řadu pro obecné $x_0 \in (0, \infty)$ (jejímž je pak nutně součtem na $(x_0 - R, x_0 + R)$, kde R je příslušný poloměr konvergence) jsme spočítali (metodou podobnou výše uvedenému výpočtu u funkce $\arctan x$) jako

$$\log(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x_0^{n+1}} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Poloměr konvergence je zjevně roven x_0.

Pro reálně analytické funkce tedy platí násladující: jsou-li f a g reálně analytické na okolí bodu x_0 a platí $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, $n = 0, 1, \ldots$, potom $f = g$ na okolí bodu x_0.

Jinými slovy: mocninné řady se shodují, právě tehdy, když se shodují všechny jejich koeficienty. To můžeme použít například při řešení diferenciálních rovnice, kde (za předpokladu existence reálně analytického řešené), můžeme hledat řešení ve tvaru mocninné řady.