Nechť $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ má v bodě z totální diferenciál. Definujme $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = \nabla\varphi(z) \cdot x$ (tedy $f(x)$ je derivace φ v bodě z ve směru x). Položme $M = \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Potom podmínka (ii) z předchozí věty (podmínka (i) není splněna nikdy) dává pro extrém f v bodě a vzhledem k M rovnici ($g(x) = x_1^2 + \cdots x_d^2 - 1$)

$$\nabla f(a) = \nabla\varphi(z) = 2\lambda(a_1, \ldots, a_d).$$

Tedy extrémů vzhledem k M nabývá f v bodech $\pm\dfrac{\nabla\varphi(z)}{|\nabla\varphi(z)|}$. To odpovídá faktu, že $\nabla\varphi(z)$ udává směr největšího růstu (a $-\nabla\varphi(z)$ největšího klesání) funkce φ v bodě z.

Definice 1 (kompaktní množina)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $K \subseteq M$. Potom říkáme, že K je kompaktní, pokud je metrický prostor $(K, \rho|_{K\times K})$ kompaktní.*

Věta 2 (kompaktnost v $\mathbb{R}^d$)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená a omezená (existuje $\delta > 0$, že $K \subset U(0, \delta)$), potom K je kompaktní.*

Jako důsledek pak platí, že je-li f spojitá vzhledem ke kompaktní množině M, pak vzhledem k M nabývá globálního maxima i globálního minima. Rovněž triviálně platí, že každá kompaktní množina je uzavřená a omezená.

Definice 3 (úplný metrický prostor)**.** *Metrický prostor (M, ρ) nazýváme úplný pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset M$ splňující podmínku*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

je konvergentní (tj. má limitu v M vzhledem k ρ).

Věta 4 (kontraktivní zobrazení)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Zobrazení $\Phi : M \to M$ nazýváme kontraktivní (kontrakce), pokus existuje $0 < r < 1$, že pro všechna $x, z \in M$ platí*

$$\rho(\Phi(x), \Phi(z)) \leq r\rho(x, z).$$

Věta 5 (Banachova o kontrakci)**.** *Nechť (M, ρ) je neprázvný úplný metrický prostor a $\Phi : M \to M$ kontrakce. Potom existuje právě jedno $x \in M$ pro které platí $\Phi(x) = x$ (tzv. pevný bod zobrazení Φ).*

Věta 6 (Picardova)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ je otevřená a $F : U \to \mathbb{R}^d$ a nechť navíc platí*

- *F je spojitá na U,*
- *pro každé $(a, b) \in U$ existují $\delta > 0$ a $L > 0$, že pro všechna $(x, u), (x, v) \in U((a, b), \delta)$ platí*

  $$|F(x, u) = F(x, v)| \leq L|u - v|.$$

  Potom pro každé $(a, b) \in U$ existuje $\delta > 0$, že rovnice

  $$f'(x) = F(x, f(x))$$

  má na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ právě jedno řešení splňující $f(a) = b$.