Parciální zlomky

Nyní se budeme zabývat integrací racionálních funkcí, tj. funkcí f ve tvaru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy.

Na rozehřátí nejprve vyjádříme $f(x)$ ve tvaru $\frac{R(x)}{T(x)} + S(x)$, kde

- R, S a T jsou polynomy,
- R a T nemají společné kořeny (ani komplexní),
- $\deg R < \deg T$,
- koeficient u nejvyšší mocniny T (tzv. vedoucího monočlenu) ja roven 1.

V následujícím kroku polynom T zapíšeme ve tvaru

$$T(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_M)^{m_M} (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \cdots (x^2 + p_N x + q_N)^{n_N}.$$

Zde a_i odpovídají reálným kořenům T a násobností m_i a kvadratické polynomy $x^2 + p_j x + q_j = (x - \beta_j)(x - \overline{\beta}_j)$ odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů T a násobností n_j (takový tvar existuje, protože T má pouze reálné koeficienty).

Věta 0.1. *Nechť polynomy R a T splňují podmínky výše, potom exsitují (jednoznačně určené) koeficieny A_i^k, B_j^l a C_j^l (indexy v rozsahu, jako suma níže), že*

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_i^k}{(x - a_i)^k} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{n_i} \frac{B_j^l x + C_j^l}{(x^2 + p_j x + q_j)^l}.$$

Za každý člen $(x - a)^k$ v rozvoji T tedy do sumy napravo přidáme k členů (parciálních zlomků)

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k},$$

každý člen $(x^2 + px + q)^k$ v rozvoji T pak do sumy napravo přidá k členů (parciálních zlomků)

$$\frac{B_1 x + C}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Spočítali jsme (pomocí tzv. zakrývací metody)

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}$$

Pomocí převodu na soustavu lineárních rovnic pak

$$\frac{x + 1}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x - 1}{x^2 + 1}$$

Parciální zlomky integrujeme následovně: u reálných kořenů rovnou použijeme lineární substituci

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} A\log|x-a|, & k=1, \\ \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}, & k>1. \end{cases}$$

U kvadratických členů parciální zlomek nejprve rozložíme

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \int \frac{C-\frac{pB}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

První člen pak spočítáme pomocí kvadratické substituce

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \begin{cases} \log(x^2+px+q), & k=1, \\ \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}, & k>1. \end{cases}$$

Druhý integrál jsme už počítali (viz výše).

Následující standardní substituce převádějí mnoho integrálů na parciální zlomky (R je vždy racionální funkce více proměnných)

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx \quad \to \quad t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

Například (pro $t=\sqrt{x+1}$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$)

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2-1+t}\,dt$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,dx \quad \to \quad t=\tan x,$$

Např. (používáme $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$, $\cos^2 = \dfrac{1}{t^2+1}$, $\sin x\cos x = \dfrac{t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{1}{t^2+1}\,dt$)

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{t^2+1}}{\frac{t}{1+t^2}+2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)(2t^2+t+2)}\,dt.$$

Obecně pak můžeme použít

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \quad \to \quad t=\tan\frac{x}{2}.$$

Kapitolu zakončíme několika příklady na lepení. Spočítáme $\int f(x)\,dx$ pro $f(x)=\max(x^2,1)$, dostaneme: $\frac{x^3}{3}$ je primitivní funkce k f na $(-\infty,-1)$ a

$(1,\infty)$, x je primitivní funkce k f na $(-1,1)$. Po dvojnásobném lepení dostaneme, že funkce H definovaná jako

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}, & x \in (1,\infty), \\ -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}, & x \in (-\infty,-1), \\ x, & x \in [1,1], \end{cases}$$

je primitivní funkce funcke k f na $\mathbb{R}$ (poznamenejme, že f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ musí exsituvat).

Někdy nudeme muset lepit i v nekonečně mnoha bodech, např. pro funkci $\max(\sin x, 0)$, nebo v následujícím typickém případě (který ovšem nebudeme schopni dopočítat, protože stále ještě neznáme nevlastní limity).

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2+1} + 2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{2t^2+3}\,dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tan x\right).$$

Použili jsme 2. větu o substituci pro $\varphi(x) = \arctan(x)$, $\varphi : (-\infty,\infty) \stackrel{na}{\to} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x+2}$, kde $f \circ \varphi \cdot \varphi' = \frac{1}{2t^2+3}$ (po úpravě). Primitivní funkci jsme tedy dostali jen na $(a,b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (a pomocí periodičnosti $+k\pi$). Funkce f je ale spojitá na $\mathbb{R}$ a tedy budeme muset lepit (ve všech bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$).