Spojitost a limita funkcí jedné reálné proměnné

Reálnou (**komplexní**) **funkcí** jedné reálné proměnné budeme rozumět zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Budeme používat obvyklé značení intervalů, např. $(a, b] = \{z \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ a rovněž značení $|x| = \max\{-x, x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{(trojúhelníková nerovnost)}.$$

Definice 0.1 (okolí a prstencové okolí)**.** *Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ definujeme množiny*

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\},$$
$$P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$$

a nazýváme je ***okolí*** *a* ***prstencové okolí*** *bodu a s poloměrem δ.*

Definice 0.2 (limita a spojitost funkce - část 1)**.** *Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f je* ***spojitá v bodě*** *a, pokud platí:*

$$(S) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f ***má v bodě*** *a* ***limitu*** *$L \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = L$), pokud platí:*

$$(L) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady. *1. Platí*

$$\begin{aligned}(L) &\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon)\\ &\iff \exists C > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : |f(x) - L| < C\varepsilon.\end{aligned}$$

Analogicky pro výrok (S).

2. (jednoznačnost limity)

$$\left(\left(\lim_{x \to a} f(x) = L\right) \wedge \left(\lim_{x \to a} f(x) = M\right)\right) \implies (L = M).$$

3. Je-li f definována na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, potom

$$(f \text{ je spojitá v } a) \iff \left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

4. (extrémně důležitá) Pokud $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) = g(x)$ a $L \in \mathbb{R}$, potom

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = L\right) \iff \left(\lim_{x \to a} g(x) = L\right).$$

5. Pro $A, B \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = Ax + B$ spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}$.

6. *Definujme (tzv. Dirichletovu funkci)*

$$f(x) = \begin{cases} 1: & x \in \mathbb{Q}, \\ 0: & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Potom f je nespojitá ve všech bodech množiny $\mathbb{R}$. Na rozmyšlenou: f nemá limitu v žádném bodě množiny $\mathbb{R}$.

7. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} x + a = 2a.$

Lemma 0.3. *Pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ pro nějaké L, potom*

1. $\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : |f(x)| < C,$
2. *pokud* $L \neq 0$ *potom* $\exists D > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : \frac{1}{|f(x)|} < D,$

Věta 0.4 (aritmetika limit - verze 1)**.** *Je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *potom:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B,$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$
3. *pokud* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$