Věta 1 (diferenciál složeného zobrazení). *Nechť* $F : \mathbb{R}^d \supset D_F \to \mathbb{R}^m$ *a* $G : \mathbb{R}^m \supset D_G \to \mathbb{R}^k$ *a nechť existují* $dF(a)$ *a* $dG(F(a))$. *Potom existuje* $d(G \circ F)(a)$ *a platí* $d(G \circ F)(a)h = dG(F(a)) \cdot dF(a)h$, $h \in \mathbb{R}^d$.

Poznámky a příklady. 1. *Nechť pro* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *existují* $f'(a)$ *a* $g'(a)$. *Definujme* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *a* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jako* $F = (f, g)$ *a* $G(u, v) = uv$. *Potom podle výše uvedené věty dostaneme*

$$(fg)'(a) = \begin{pmatrix} g(a) & f(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix} = g(a)f'(a) + f(a)g'(a),$$

tedy známé pravidlo o derivaci součinu.

Stejným způsobem můžeme dostat pro $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *pravidlo*

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

a obdobně můžeme získat i analogii klasického pravidla o derivaci podílu.

2. *(řetízkové pravidlo) pro speciální případ* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *a* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *(tedy* $g \circ F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*) dostaneme*

$$\frac{\partial (g \circ F)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_k}(F(a)) \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a).$$

Věta o diferenciálu složeného zobrazení má jako důsledek i následující větu o střední hodnotě:

Věta 2 (o střední hodnotě). *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $f : U \to \mathbb{R}$ *a* $df(a)$ *existuje pro všechna* $a \in U$. *Potom pro každou dvojici* $a, b \in U$ *splňující*

$$L = \{(1-t)a + tb : t \in (0,1)\} \subset U$$

existuje $\gamma \in L$, *že platí*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma)(b_k - a_k).$$