Věta 1 (Peanův tvar zbytku)**.** *Platí* $f(x) - T^n_{a,f}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Výraz $R^n_{a,f}(x) = f(x) - T^n_{a,f}(x)$ nazýváme zbytkem Taylorova polynomu $T^n_{a,f}(x)$, předchozí větu lze tedy zformulovat ve tvaru $R^n_{a,f}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Tento kvalitatavní výsledek má pro nás následující dva důsledky:

Věta 2. *(jemnější podmínky pro extrémy)*

1. *Nechť* $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, 2n-1$, *potom platí:*
   - *je-li* $f^{(2n)}(a) > 0$, *pak má* f *v* a *(ostré) lokální minimum,*
   - *je-li* $f^{(2n)}(a) < 0$, *pak má* f *v* a *(ostré) lokální maximum.*
2. *Nechť* $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, 2n$. *Pokud* $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, *potom* f *nemá v* a *lokální extrém.*

Druhým důaledkem Věty 1 je následující trik při výpočtu limit: nechť $T^n_{a,f}$ existuje, potom platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^n_{a,f}(x) + T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{R^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} + \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n}.
\end{aligned}$$

za předpokladu, že limita napravo existuje. To nastává, pokud $f^k(a) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, tj. $T^n_{a,f}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Takový výpočet limity je vlastně totéž, jako bychom n-krát použili l'Hospitalovo pravidlo, nicméně výhodou výše uvedeného přístupu je, že koeficienty Taylorova polynomu často zjistíme i snadněji, než pracným derivováním.

Z definice jsme odvodili následující Taylorovy polynomy:

$$\begin{aligned}
T^n_{0,e^x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n!}, \\
T^{2n}_{0,\sinh x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sinh x}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \\
T^{2n+1}_{0,\cosh x}(x) = T^{2n}_{0,\cosh x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!},
\end{aligned}$$

$$T^{2n}_{0,\sin x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sin x}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$
$$T^{2n+1}_{0,\cos x}(x) = T^{2n}_{0,\cos x}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
$$T^{n}_{1,\log x}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^{k}}{k}.$$

Věta 3 (Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť $f^{(n)}$ existuje a je spojitá na otevřeném nadintervalu intervalu $[a,x]$, $a < x$, a nechť $f^{(n+1)}$ existuje na (a,x). Potom*

- *existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$f(x) - T^{f}_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrangeův tvar)}$$

- *existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$f(x) - T^{f}_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n}(x-a), \quad \textit{(Cauchyův tvar)}$$