Prvním speciálním druhem budou tzv. rovnice se separovanými proměnnými, tedy rovnice ve tvaru

$$y' = f(x)g(y). \tag{SP}$$

Úmluva: kdykoliv řekneme interval, budeme mít na mysli neprázdný otevřený interval.

Věta 1 (řešení rovnice (SP))**.** *Nechť*

- *f je spojitá na intervalu I,*
- *g je spojitá a nenulová na intervalu J,*
- *F je primitivní funkce k f na I,*
- *G je primitivní funkce k $\dfrac{1}{g}$ na J,*

Potom:

1. *jsou-li $C \in \mathbb{R}$ a interval $I^* \subseteq I$ voleny tak, aby platilo*

   $$F(x) + C \in D_{G^{-1}}, \quad x \in I^*$$

   pak je funkce

   $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \quad x \in I^* \tag{1}$$

   řešením rovnice (SP)*.*

2. *Volme $x_0 \in I$ a $y_0 \in J$ a položme*

   $$F^*(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad G^*(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,dt.$$

   Potom je funkce

   $$y^*(x) = (G^*)^{-1}(F^*(x))$$

   řešením rovnice (SP) *na okolí bodu x_0 splňujícím $y^*(x_0) = y_0$ (tj. y^* je řešením tzv. Cauchyovy úlohy). Navíc, pokud je z řešení rovnice* (SP) *splňující $z(x_0) = y_0$, potom existuje okolí budu x_0, na kterém platí $z = y^*$.*

Jak dostaneme pomocí Věty 1 maximální řešení? Nejprve si všimneme, že pro každý nulový bod C funkce g je $y(x) = C$, $y \in I \subset D_f$ řešením (SP) (tzv. stacionální řešení). Pokud ve Větě 1 navíc platí:

- I je nějaký maximální interval v D_f,
- J maximální interval v D_g mínus nulové body g,
- I^* maximální interval splňující (1),

potom je řešení $y(x) = G^{-1}(F(x)+C)$ maximální v následujícím smyslu: je-li α krajní bod I^* (řekněme levý) potom buď $\alpha \notin D_f$, $\lim_{x\to\alpha+} y(x)$ existuje, ale neleží v D_g (v těchto případech už nelze řešení za tento krajní bod prodloužit), nebo lze řešení y spojitě navázat na stacionární řešení ve tvaru $\tilde{y} = C$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$, $g(C) = 0$. V posledním případě můžeme řešení y prodloužit (jako řešení (SP)) pomocí následující věty

Věta 2 (o lepení pro (SP))**.** *Nechť*

- *z je řešení rovnice* (SP) *na intervalu (a, b),*
- *w je řešení rovnice* (SP) *na intervalu (b, c),*
- $\lim_{x\to b-} z(x) = L = \lim_{x\to b+} w(x)$*,*
- *f je spojitá v b a g je spojitá v L.*

Potom je funkce

$$y(x) = \begin{cases} z(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = b, \\ w(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$

řešením rovnice (SP) *(na intervalu (a, c)).*

Poznámky. *Předchozí věta platí obecněji pro rovnice $y' = F(x, y)$, kde místo spojitosti f a g, předpokládáme spojitost F v (b, L).*

Věta 1 a Věta 2 jsou tak podkladem pro následující 6 krokový postup pro řešení rovnic ve tvaru (SP):

krok 1. najdeme všechny maximální intervaly I_k v definičním oboru D_f,

krok 2. najdeme všechny maximální intervaly J_l v definičním oboru D_g sjednoceném s nulovými body g (tj. v definičním oboru $\frac{1}{g}$),

krok 3. určíme stacionární řešení odpovídající nulovým bodům funkce g (na intervalech I_k),

krok 4. pro každý interval I_k najdeme odpovídající primitivní funkci F a pro každý interval J_l odpovídající primitivní funkci G

krok 5. pro každou dvojici (I_k, J_l) a $C \in \mathbb{R}$ najdeme všechny maximální intervaly I^* a jim odpovídající řešení $y = G^{-1}(F + C)$ podle Věty 1,

krok 6. řešení případně slepíme podle Věty 2, abychom dostali všechna maximální řešení.