Věta 0.1 (o lepení)**.** *Nechť $f : (a, c) \to \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce k f na (b, c). Potom existují limity*

$$\lim_{x\to b-} F(x) = L^-, \quad a \quad \lim_{x\to b+} G(x) = L^+$$

a funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b), \\ G(x) - L^+ + L^-, & x \in (b, c), \\ L^-, & x = b, \end{cases}$$

je primitivní funkcí k f na (a, c).

Poznámky a příklady. *1. Metodu per partes používáme často přímo, např.*

$$\int x \cos x = \quad dx = x \sin x - \int \sin x \, dx \stackrel{c}{=} x \sin x.$$

Obecně pro P polynom a f zpravidla jednu z funkcí e^x, e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$ (případně $\sinh x$, $\cosh x$)

$$\int P(x)f(x) \, dx$$

budeme P při per pertes derivovat (i několikanásobně) a f integrovat

2. *Naopak, pro P polynom a f zpravidla jednu z inverzních funkcí $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtanh} x$, $\operatorname{argcotanh} x$*

$$\int P(x)f(x) \, dx$$

budeme P při per pertes integrovat a f derivovat.

3. *Per partes používáme rovněž nepřímo (mnoha způsoby) následujícím způsobem spočteme důležitý integrál: nejprve označme $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ pro $n \in \mathbb{N}$. Předně*

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} \arctan x.$$

Dále

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx &= \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx - 2n \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

Po přeskupení členů dostáváme

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$$

4. *Pro použití první věty o substituci nebudeme mít vždy integrand v ideálním tvaru $f' \circ \varphi \cdot \varphi'$, ale je potřeba jej upravit. Např. pro substituci $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$,*

$$\int f(e^x)\, dx = \int \frac{f(e^x)}{e^x} e^x\, dx - \int \frac{f(t)}{t}\, dt$$

Potobně pro substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$,

$$\begin{aligned}\int \sin^{2n+1} x\, dx &= \int \sin x (\sin^2 x)^n\, dx \\ &= -\int -\sin x(1-\cos^2 x)^n\, dx = -\int (1-t^2)^n\, dt.\end{aligned}$$

5. *Podobně postupujeme u snadné, ale velmi užitečné tzv. lineální substituce $t = ax + b$, $dt = a\, dx$,*

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int a\, f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(t)\, dt.$$

Derivace vnitřní funkce je pouze konstanta, kterou můžeme integrál vždy přenásobit.

6. *Rovněž často používáme tzv. kvadratickou substituci $t = ax^2 + bx + c$, $dt = 2ax + b$,*

$$\int (2ax+b)\cdot f(ax^2+bx+c)\, dx = \int f(t)\, dt.$$

Např.

$$\int xe^{-x^2}\, dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

7. *(důležitý) pomocí lineární substituce spočítáme pro $m \in \mathbb{N}$*

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}$$

v případě, že kvadratický polynom $x^2 + px + q$ nemá reálné kořeny. Potom totiž pro $a = \frac{p}{2}$ a $b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ platí $x^2 + px + q = (x+a)^2 + b^2$ (nechvalně známé doplnění na čtverec) a můžeme psát (lineárlní substituce v posledním kroku $t = \frac{x+a}{b}$, $dt = \frac{1}{b}\, dx$)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m} &= \int \frac{1}{((x+a)^2+b^2)^m}\, dx = \frac{1}{b^{2m}}\int \frac{1}{((\frac{x+a}{b})^2+1)^m}\, dx \\ &= \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^m}\, dt.\end{aligned}$$

Integrál na konci už umíme spočítat pomocí příkladu (3).

Parciální zlomky

Nyní se budeme zabývat integrací racionálních funkcí, tj. funkcí f ve tvaru $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy.

Na rozehřátí nejprve vyjádříme $f(x)$ ve tvaru $\dfrac{R(x)}{T(x)} + S(x)$, kde

- R, S a T jsou polynomy,
- R a T nemají společné kořeny (ani komplexní),
- $\deg R < \deg T$,
- koeficient u nejvyšší mocniny T (tzv. vedoucího monočlenu) ja roven 1.

V následujícím kroku polynom T zapíšeme ve tvaru

$$T(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_M)^{m_M} (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \cdots (x^2 + p_N x + q_N)^{n_N}.$$

Zde a_i odpovídají reálným kořenům T a násobností m_i a kvadratické polynomy $x^2 + p_j x + q_j = (x - \beta_j)(x - \overline{\beta}_j)$ odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů T a násobností n_j (takový tvar existuje, protože T má pouze reálné koeficienty).