Věta 0.1 ((druhá) derivace a konvexita/konkávnita)**.** *Je-li $f, f' \in C((a,b))$ a existuje-li f'' na (a,b), potom:*

1. *pokud $f'' > 0$ na (a,b), potom f je ryze konvexní na (a,b),*
2. *pokud $f'' < 0$ na (a,b), potom f je ryze konkávní na (a,b),*
3. *pokud $f'' \geq 0$ na (a,b), potom f je konvexní na (a,b),*
4. *pokud $f'' \leq 0$ na (a,b), potom f je konkávní na (a,b).*

Platí podobné poznámky jako pro Větu **??** (rozšiřování na uzavřené intervaly a ekvivalenci při neostrých nerovnostech).

Pokud $f'' \geq 0$ na $U(a,\delta)$ potom f' je neklesající na $U(a,\delta)$ (a podobně pro opačnou nerovnost). Odtud snadno dostaneme následující větu:

Věta 0.2 (postačující podmínka pro extrém)**.** *Nechť f'' existuje na $U(a,\delta)$ a $f'(a) = 0$, potom platí:*

1. *pokud $f'' \geq 0$ na $U(a,\delta)$, potom f má v a lokální minimum,*
2. *pokud $f'' \leq 0$ na $U(a,\delta)$, potom f má v a lokální maximum.*

Příklady: e^x je konvexní na $\mathbb{R}$, $\log x$ je konkávní na $(0,\infty)$, $\arctan x$ je konvexní na $(-\infty, 0]$ a konkávní na $[0,\infty)$ ($(\arctan x)'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$). Všimněme si, že v bodě f přechází konvexita na konkávitu, takovým bodům říkáme inflexní.

Definice 0.3 (inflexní bod)**.** *Říkáme, že a je inflexním bodem funkce f, pokud $f'(a)$ existuje vlastní a existuje $\delta > 0$, že*

$$f \text{ je konvexní na } P_-(a,\delta) \text{ a konkávní na } P_+(a,\delta),$$

nebo

$$f \text{ je konvexní na } P_+(a,\delta) \text{ a konkávní na } P_-(a,\delta).$$

Platí, že pokud $f''(a)$ existuje a a je inflexním bodem funkce f, potom $f''(a) = 0$.

Definice 0.4. *Funkci ve tvaru $Ax + B$ nazýváme asymptotou funkce f v $\pm\infty$, pokud platí*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (Ax + B) = 0.$$

Koeficienty asymptoty (pokud existuje) spočítáme pomocí vzorečků

$$A = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad B = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax).$$

Například funkce $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{1+x^2}$ má stejnou asymptotu v $+\infty$ i v $-\infty$ a to $x - 1$. Platí totiž

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x}{1 + x^2} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2-x}{1+x^2}=-1.$$

Poznamenejme ještě, že pomocí l'Hospitalova pravidla (jsou-li splněny předloklady) dostaneme vzoreček $A=\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$.

Věta 0.5 (Cauchyova o střední hodnotě)**.** *Je-li $f,g\in C([a,b])$, $a<b$, f' a g' existují na (a,b). Potom existuje $\xi\in(a,b)$, že*

$$f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a)).$$

Jako důsledek Věty 0.5 jsme si dokázali jednu část l'Hospitalova pravidla (Věta **??**). Na závěr ještě jednu větu, kterou jsme dokázali právě jako důsledek l'Hospitalova pravidla:

Věta 0.6. *Nechť f je spojitá zprava (resp. spojitá zleva) v bodě a a nechť existuje limita $\lim_{x\to a+}f'(x)=L$ (resp. $\lim_{x\to a-}f'(x)=L$). Potom $f'_+(a)=L$ (resp. $f'_-(a)=L$).*

Taylorovy polynomy

Definice 0.7 (tečna funkce)**.** *Nechť existuje $f'(a)\in\mathbb{R}$ potom funkci*

$$T_{a,f}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

nazýváme tečnou funkce f v bodě a.

Už dříve jsme si spočítali, že

$$f(x)-T_{a,f}(x)=o(x-a),\quad x\to a.$$

Pokud bychom chtěli jemnější aproximaci (řádu $o((x-a)^n)$) musíme se (obecně) uchýlit k polynomům vyššího řádu, což je jedna z cest k následující definici:

Definice 0.8 (Taylorův polynom)**.** *Nechť existuje $f^{(n)}(a)\in\mathbb{R}$ (nebo, ekvivalentně, existují $f^{(k)}\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$). Potom definujeme polynom*

$$\begin{aligned}T^n_{a,f}(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\\&=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\end{aligned}$$

a nazýváme ho Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě a.

Spočítali jsme užitečnou rovnost $(T^n_{a,f})'=T^{n-1}_{a,f'}$, která (násobným použitím a dosazením hodnoty a) dává

$$(T^n_{a,f})^{(k)}=T^{n-k}_{a,f^{(k)}},\quad \text{a}\quad (T^n_{a,f})^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\quad k\le n.$$